# DIE
# BAHN DES PERIODISCHEN KOMETEN WINNECKE
## IN DEN JAHREN 1858—1886
## II. THEIL,

VON

**DR. EDUARD FREIHERRN VON HAERDTL,**

PRIVATDOCENT FÜR ASTRONOMIE AN DER K. K. UNIVERSITÄT IN INNSBRUCK.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 7. FEBRUAR 1889.

## VORREDE.

Mit diesem zweiten Theil können meine Untersuchungen über die Bahn des periodischen Kometen Winnecke in den Jahren 1858—1886 als abgeschlossen bezeichnet werden.

Schon während der Drucklegung des ersten Theiles hätte ich gern noch einige Capitel näher ausgearbeitet und einige Zusätze machen wollen; ich denke hiebei in erster Linie an die Untersuchung, ob sich nicht, statt die Jupitersmasse allein zu verbessern, durch eine gleichzeitige geringe Correctur der Massen der übrigen störenden Planeten auch das Endziel — eine gute Darstellung der dreissigjährigen Beobachtungen des Winnecke'schen Kometen erreichen lasse. Um aber diese, zur Zeit der Durchsicht der letzten Correctur bereits zu Ende geführte Untersuchung noch in den ersten Theil aufnehmen zu können, hätte dieser in kürzester Zeit nicht unwesentlich umgearbeitet werden müssen.

Ich habe es deshalb vorgezogen, auf die nachträgliche Aufnahme der noch nicht verwertheten Resultate in den ersten Theil ganz zu verzichten und dieselben lieber für sich zu veröffentlichen und als zweiten Theil thunlichst bald folgen zu lassen.

Bei Durchsicht der vorliegenden Abhandlung wird man aber finden, dass sie nicht nur die erst veröffentlichten Untersuchungen ergänzt und vervollständigt, sondern sich auch über ein Gebiet erstreckt, das in dem ersten Theil nicht berührt werden konnte, nämlich die Massenbestimmung des Planeten Mercur.

Der Leser mag entscheiden, wie weit die auf diesem Gebiete erreichten Resultate von Werth sind.

Die letzte Correctur der Bogen zum ersten Theil fiel in eine Zeit, wo ich leider nicht im Stande war meine volle Aufmerksamkeit dieser Aufgabe zuzuwenden. Es sind daher auch, trotzdem ich die grösste Sorgfalt auf die correcte Herstellung des Satzes während der zwei ersten Correcturen verwendet hatte, schliesslich in den Zahlenangaben und dem Texte noch einige Fehler stehen geblieben, und zwar:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Seite | 7 [219] | Zeile 2 und 4 | von | unten | lies: | noyau statt noyeau. |
| „ | 42 [254] | „ 21 | „ | „ | „ | Piazzi $13^h58^m18^s81$ statt $13^h58^m21^s81$. |
| „ | 45 [257] | „ 34 | „ | oben | „ | $-22°32'6''9$ statt $-22°34'6''9$. |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Seite 54 [266] | Zeile 7 | von | unten | lies: | \|—0·5\| }—8·0{ \| }+12·0{ \| statt \|—4·9\| }—8·0{ \| }+7·6{ \|. |
| „ 57 [269] | „ 23 | „ | „ | „ | in letzter Verticalreihe }+12·0{ statt }+7·6{. |
| „ 69 [281] | „ 3 | „ | „ | „ | $\partial\Delta\pi = +0\overset{s}{.}090$ statt $\partial\Delta\pi$ $+0\overset{s}{.}1509$.<br>$\partial\Delta\Omega = +3\cdot970$ „ $\partial\Delta\Omega$ $+4\cdot7950$.<br>$\partial\Delta i = +0\cdot182$ „ $\partial\Delta i$ $+0\cdot5520$. |
| „ 72 [284] | „ 4 | „ | „ | „ | $\omega = -0\cdot003\,3557$ statt $\omega = -0\cdot003\,3534$. |
| „ 72 [284] | „ 1 | „ | „ | „ | $\Sigma\Delta\mu = -9\overset{s}{.}448\,8552$ statt $\Sigma\Delta\mu = 9\overset{s}{.}448\,8529$. |
| „ 80 [292] | „ 3 | „ | „ | „ | durch Addition der Verticalreihen und der entsprechenden Werthe für $[an]$, $[bn]$ etc: statt: durch Addition der Verticalreihen: |
| „ 81 [293] | „ 11 | „ | „ | „ | $i' =$ statt $i =$ |
| „ 84 [296] | „ 16 | „ | oben | „ | $\mu = 610\overset{s}{.}137\,6087$ statt $\mu = 610\overset{s}{.}137\,6110$. |
| „ 84 [296] | „ 13 | „ | unten | „ | Seite 69 statt Seite 67. |

Ich erlaube mir zum Schluss die Bitte, dieselben gütigst berichtigen zu wollen.

---

# Erster Theil.

## Anschluss der Elemente an die Beobachtungen mit Berücksichtigung neuerer Werthe für die Massen der störenden Planeten.

### Einleitung.

Auf Seite 69 meiner ersten Abhandlung über den periodischen Kometen Winnecke habe ich die Werthe zusammengestellt, welche bei Ermittlung der Störungen für die Massen der in Betracht gezogenen Planeten angenommen worden waren. Ich setze sie nochmals hier an:

| | |
|---|---|
| Masse der Venus (♀) | $= 1:401\,839$ |
| „ der Erde und des Mondes (♁ + ☾) | $= 1:355\,499$ |
| „ des Mars (♂) | $= 1:268\,0337$ |
| „ des Saturn (♄) | $= 1:3501\cdot6$ |
| „ des Uranus (♅) | $= 1:22000$ |

Diese Massenannahmen können heute keineswegs als die genauesten angesehen werden.

In erster Hinsicht schien es mir daher nöthig zu untersuchen, ob durch Übergang auf neuere bessere Werthe die Darstellung der dreissigjährigen Beobachtungen des periodischen Kometen Winnecke wesentlich beeinflusst werde, ferner auch ob und wie weit jener Werth alterirt würde, zu dem wir für die Masse des Planeten Jupiter gelangt waren und den wir aus den von diesem Planeten auf den Winnecke'schen Kometen ausgeübten Störungen zu: $m = 1:1047\cdot1752 \pm 0\cdot0136$ neu bestimmt hatten.

Die erste Frage lässt sich sofort beantworten, denn, da auf Seite 71 und 72 des ersten Theiles die Elementenstörungen sich für jeden Planeten getrennt angesetzt finden, ist ein Übergang auf jede beliebige andere Massenannahme leicht durchführbar. So überzeugt man sich, dass z. B. für Venus, obwohl für diesen Planeten die Störungen in der mittleren Anomalie im Maximum nur 240″ betragen, doch bei Übergang auf jenen Venus Massenwerth, den Le Verrier erhalten hat: (♀) $= 1:412\,150$ an $\Delta M$ noch ein Increment im Betrage von mehreren Secunden angefügt werden müsse. Da aber weiter ein solches Increment merklich vergrössert, ja bei einigen Orten fast in den zehnfachen Betrag auf den geocentrischen Ort übergeht, so erhellt daraus, dass die Darstellung der Beobachtungen unseres Kometen in hohem Grade von der angenommenen Venusmasse abhängig sei. Dasselbe gilt für die anderen Planeten.

Dieser eben erwähnte Umstand, dass die Darstellung einiger Normalorte ganz anders ausfällt, wenn man die mittlere Anomalie nur um einen geringen Betrag vergrössert oder verkleinert, rief in mir aber weiter das Bedenken wach, ob es denn hiernach überhaupt zulässig sei, die vermuthlich auch nur kleinen Mercursstörungen ganz zu vernachlässigen, wie ich es im ersten Theile gethan hatte.

Eine flüchtige Rechnung erhöhte aber noch mein Bedenken, denn sie zeigte, dass die Entfernung des Kometen Winnecke von dem Planeten Mercur sogar bis auf 0·35 astron. Einh. herabsinken könne.

Hiedurch veranlasst weiter auf diesen Gegenstand einzugehen, ward ich endlich belehrt, dass nicht nur die Mercursstörungen keineswegs so klein seien, wie ich anfänglich annehmen zu können geglaubt hatte, sondern, dass es im Gegentheil sogar nothwendig sei den störenden Einfluss des Planeten Mercur strenge in Rechnung zu ziehen, wenn nicht die Sicherheit der Schlussresultate völlig in Frage gestellt sein sollte.

Meine erste Aufgabe bestand demnach darin, die Mercursstörungen für den Gesammtzeitraum 1858—1886 nachzutragen.

## I. Capitel.

### Die Störungen des Planeten Mercur.

Ich will hier nur kurz die Bemerkungen über die Art und Weise wie die Störungen des Mercur ermittelt wurden, zusammenfassen.

Nur für jenen Theil der Bahn des Winnecke'schen Kometen wurden die Mercursstörungen direct von 5 zu 5 Tagen berechnet, in welchem die Distanz des Kometen von der Sonne unterhalb 1·6 astron. Einh. gesunken war.

Um dieses Bahnstück zu durchlaufen, benöthigt der Komet ungefähr 160 Tage. Für den übrigen Theil der Bahn erscheinen die Störungen aber dadurch berücksichtigt, dass am Anfang und Ende jene kleinen Correctionen an die Elemente angefügt wurden, welche aus der Reaction des Mercur gegen die Sonne entstehen.

Bei der numerischen Ausführung selbst bediente ich mich der Formeln, die O. Backlund in seiner Abhandlung „Komet Encke 1865—1885“ gibt.

Die Masse des Planeten Mercur wurde zu: $(☿)_0 = 1:239\,3300$ angenommen. Dass ich gerade diesen Werth, den grössten unter allen direct bestimmten, der Störungsrechnung zu Grunde gelegt habe, — dieser Werth ist bekanntlich von Backlund in seiner oben erwähnten Abhandlung Seite 39 mitgetheilt — findet seine Erklärung in folgender Erwägung:

Bei Einführung irgend eines anderen Werthes für die Mercursmasse, welcher nur kleiner sein könne, da ich den grössten ausgewählt habe, werde eine mögliche kleine Unsicherheit der Mercurs-Störungswerthe vermindert, während im umgekehrten Fall, also bei Zugrundelegung eines kleineren Werthes und nachfolgendem Übergang auf einen grösseren, eine mögliche Unsicherheit vergrössert auf die Endwerthe der Störungen übergingе.

Erst nachdem die Störungsrechnung mit obigem Massenwerth fertiggestellt war, reducirte ich sie auf den Werth: $(☿) = 1:520\,5000$ und finden sich die Mercursstörungen auch unter dieser Annahme auf S. 160 und 161 angesetzt.

Zu diesem letzten Werth muss ich bemerken, dass er, unter Annahme gleichen Gewichtes, aus der Vereinigung folgender drei Werthe entstanden ist.

$$(☿)_1 = 1:266\,8700$$
$$(☿)_2 = 1:763\,6440$$
$$(☿)_3 = 1:531\,0000$$
$$\tfrac{1}{3}\,[(☿)_1 + (☿)_2 + (☿)_3] = 1:520\,5000$$

$(☿)_1$ ist jener Werth, zu den Herrn O. Backlund die Verbindung der Erscheinungen des Kometen Encke (1871—1885) unter Annahme der, der Sonnenparallaxe: $\pi = 8''80$ entsprechenden, Erdmasse: $(♁ + ☾) = 1:328\,129$ geführt hat,[1] während dem oben angenommenen Werth $(☿)_0$ die Newcomb'sche Erdmasse $(\pi = 8''848)$ zu Grunde gelegt erscheint.

[1] Vergl. O. Backlund, Komet Encke 1865—1885, S. 7 und 39. St. Petersburg 1886.

Der zweite Werth (☿)$_2$ ist der Asten'sche. Derselbe ist bekanntlich auch aus der Bearbeitung des Kometen Encke gewonnen worden, und zwar aus der Verbindung der Erscheinungen dieses Kometen während der Jahre 1818—1868.[1]

Der letzte Werth (☿)$_3$ wurde von Le Verrier gegeben. Wir werden weiter unten eingehender auf die Art und Weise zu sprechen kommen wie dieser Werth erhalten wurde, doch will ich gleich hier bemerken, dass man seine Herleitung findet in den „Annales de l'observatoire impérial de Paris", tome VI, p. 91. Paris 1861.

Sieht man von den Werthen für die Masse des Mercur ab, die Encke aus der Bearbeitung des nach ihm benannten Kometen abgeleitet hat, da sie wohl durch die Untersuchungen Asten's überholt sind, so können die drei obigen Werthe als die einzig direct bestimmten bei Wahl der Masse für Mercur in Frage kommen. Irrthümlich habe ich an einem Orte die Angabe gefunden, dass S. Newcomb in guter Übereinstimmung mit Asten für die Mercursmasse den Werth: 1:750 0000 abgeleitet habe. Dieser Werth wurde aber von Newcomb nicht abgeleitet, sondern nur angenommen, wie aus folgender Stelle sich klar ergibt.

Astronomical Papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac. Vol. 1, Part VI. „Transits of Mercury 1677—1881" by S. Newcomb (Washington 1882, p. 468).

„Von Asten's investigations on Encke's comet indicate a large diminution of the mass of Mercury generally assumed. The different results for this mass are so discordant that the choice among them must be a matter of judgment rather than of calculation. Analogy would lead us to suppose that the density of this planet is probably less than that of the earth. It is the opinion of the writer, from a consideration of all the data, that we may adopt the value: Mass of Mercury = 1:750 0000 as being at present (1882) the most probable value".

Der Vollständigkeit halber sei schliesslich noch darauf hingewiesen, dass Herr F. Tisserand in seinem Aufsatze „Sur la détermination des masses de Mercure, de Vénus, de la Terre et de la parallaxe solaire" (Comptes rendus, XCII, 1881, p. 653) durch eine etwas veränderte Discussion derselben fünf Grundgleichungen, welche Le Verrier zwischen den Correctionen der Massen der Planeten Mercur, Venus und Erde erhalten hatte, zu zwei Grenzwerthen für die Masse des Mercur gelangt ist, und zwar:

$$(☿)_{\mathrm{I}} = 1:710\,0000$$
$$(☿)_{\mathrm{II}} = 1:380\,0000.$$

Auch findet sich daselbst die Bemerkung, dass dem ersteren Werth grösseres Vertrauen entgegengebracht werden müsse.

Die eben angeführte Ansicht Tisserand's, wie jene Newcomb's über den wahren Werth der Masse des Planeten Mercur stehen nicht vereinzelt da. Ich glaube vielmehr aus einer Reihe weiterer Stellen, die ich nicht speciell hier aufführen will, schliessen zu dürfen, dass die Meinung, der Asten'sche Werth verdiene den Vorzug vor dem Le Verrier'schen, von Vielen getheilt wurde.

## II. Capitel.

### Bemerkungen zur Auswahl der Massen der störenden Planeten.

Vorerst gebe ich eine Zusammenstellung derjenigen Werthe, welche für die Massen der störenden Planeten von mir angenommen und den weiteren Rechnungen zu Grunde gelegt wurden, und knüpfe gleichzeitig an dieselben einige kurze Bemerkungen.

Ich bin mir wohl bewusst, dass das hier Gebotene keineswegs Anspruch auf Vollständigkeit erheben kann, ja dass ich für die Massen, welche schliesslich adoptirt werden, bei noch eingehenderer Beschäftigung

[1] Vergl. E. v. Asten, Untersuchungen über die Theorie des Encke'schen Kometen, II. S. 98. St. Petersburg 1878.

mit der Frage: „Welches sind die besten Annahmen, die man heute für die Masse dieses oder jenes störenden, hier in Betracht kommenden Planeten machen könne?" vielleicht zu noch einwurfsfreieren Werthen hätte gelangen können.

Eine Discussion aller Werthe durchzuführen lag aber nicht in meiner Absicht, und dass ich mich überhaupt hier etwas eingehender mit den Massen der Planeten beschäftige, findet seine Erklärung ausschliesslich darin, dass ich es für wünschenswerth erachtete, dass auch die Gründe dargelegt seien, warum ich gerade dem oder jenem Werth vor den anderen den Vorzug geben zu müssen geglaubt habe.

Ich stehe nicht an zu gestehen, dass ich bei der Auswahl der einzelnen Massen in Verlegenheit war. Wohl finden sich in der Fachliteratur Zusammenstellungen der Resultate aller bisher durchgeführten Massenbestimmungen, doch lässt sich, nach meiner Ansicht, aus denselben wenig Nutzen ziehen, da jede Bemerkung fehlt, wie dieser oder jener Werth erhalten wurde, ob er direct bestimmt sei oder nur aus einer veränderten Discussion einer früheren Bestimmung erhalten, u. s. w. Um sich ein halbwegs richtiges, selbstständiges Urtheil bilden zu können ist man daher gezwungen, an der Hand einer solchen Zusammenstellung selbst erst auf die weit zerstreute einschlägige Literatur zurückzugehen, was nicht nur viel Zeit beansprucht, sondern, wenn man nicht eine selten grosse Bibliothek zur Verfügung hat, völlig undurchführbar wird. So musste ich mich auf die neuesten Resultate beschränken, doch hoffe ich, dass die kurze Zusammenstellung vielleicht dem einen oder dem anderen Herrn Collegen, der sich mit ähnlichen Rechnungen beschäftigt, wie ich sie für den Komet Winnecke durchgeführt habe, nicht unerwünscht sein wird.

Auf die Masse des Mercur wie jene Jupiters werde ich erst später näher eingehen, doch setze ich die vorderhand angenommenen Werthe nochmals hier an:

$$\text{Masse des Mercur} = 1:520\,5000$$
$$\text{„ „ Jupiter} = 1:1047.1752.$$

Welche Annahme ich hier mache, ist völlig gleichgültig, da diese Massen weiter unten direct bestimmt werden sollen.

Für die Massen der übrigen störenden Planeten habe ich nun folgende, von den erst zu Grunde gelegten merklich differirende, Werthe angenommen:

| | |
|---|---|
| Masse der Venus | $= 1:412\,150$ |
| „ (Erde + Mond) | $= 1:322\,883$ |
| „ des Mars | $= 1:309\,3500$ |
| „ „ Saturn | $= 1:3501.6$ |
| „ „ Uranus | $= 1:22000$ |

Masse des Planeten Venus. Der eben angeführte Werth ist von Le Verrier im VI. Band der „Annales de l'observatoire de Paris." Memoires, Paris 1861 [S. 91 und 309] abgeleitet und schliesslich von ihm als Endwerth adoptirt worden. Ich habe denselben auch unverändert beibehalten, obwohl aus einer Discussion Bauschinger's[1] hervorgeht, dass dieser Werth etwas zu klein sei und man besser hiefür: 1: 411 700 anzunehmen habe, da sich mit Rücksicht einerseits auf die nahe Übereinstimmung dieser zwei Zahlen wie andererseits auf die geringen Werthe, welche die Venusstörungen unseres Kometen erreichen, die Darstellung der geocentrischen Orte des Winnecke'schen Kometen nur um Bruchtheile von Bogensecunden bei Zugrundelegung des ersten oder zweiten Werthes anders stellt.

Masse der Erde. Nach Newcomb[2] besteht folgende Relation zwischen der Sonnenparallaxe und der Erdmasse:

$$\log \pi^3 = 8\cdot35488 + \lg(♁).$$

[1] Bauschinger, Untersuchungen über die Bewegung des Planeten Mercur. München 1884, S. 13.
[2] S. Newcomb, Investigation of the Distance of the Sun etc. Washington. Observations 1865.

Die dem numerischen Theil dieses Ausdruckes zu Grunde liegenden Constanten (Länge des einfachen Secundenpendels, Dimensionen der Erde, Länge des siderischen Jahres) sind heute so zuverlässig bestimmt, dass die vier ersten Stellen desselben als völlig sicher angesehen werden können.

Unter Annahme der Sonnenparallaxe: $\pi = 8''848$ ergibt nun obige Relation für die Masse der Erde:

$$(♁) = 1:326\,848,$$

woraus man, die Mondmasse: $☾ = \frac{1}{81.44}(♁)$ setzend, schliesslich den oben angenommenen Werth erhält:

$$(♁ + ☾) = 1:322\,883.$$

Legt man aber der obigen Formel die Parallaxe der Sonne: $\pi = 8''800$ zu Grunde, so führt dieselbe zu dem Werth:

$$(♁ + ☾) = 1:328\,129.$$

Versuchend, alle jene Werthe, welche die neuesten [seit Newcomb's Discussion (1865) durchgeführten] Bestimmungen für $\pi$ ergeben haben, — dieselben finden sich unter anderen auch in Oppolzer's Lehrbuch (I. Theil, II. Aufl., S. 23) zusammengestellt — zu einem einzigen Werth zusammenzufassen, bin ich zu den Werth: $\pi = 8''800$ gelangt. Ich hatte bereits auch die Reduction der Erdstörungen des Kometen Winnecke auf diesen Werth durchgeführt, als mir zur Kenntniss kam, dass Prof. Harkness durch Discussion der zahlreichen amerikanischen Beobachtungen während des letzten Venusdurchgangs zu einem die Newcomb'sche Sonnenparallaxe völlig bestätigenden Resultat gelangt sei. Obwohl ich in die Arbeit Harkness's noch keinen Einblick gewinnen konnte, habe ich mich doch durch die erwähnte Notiz bewogen gesehen, zu dem Newcomb'schen Werth: $\pi = 8''848$ zurückzukehren, um so mehr, als auch Stone[1] durch die Discussion der englischen Beobachtungen des Venusdurchganges von 1882 auf einen grösseren Werth ($\pi = 8''832$) geführt wurde.

Masse des Planeten Mars. A. Hall hat an letzter Stelle[2] aus seinen Beobachtungen der Mars-Trabanten für die Masse dieses Planeten den Werth: $(♂) = 1:309\,3500$ erhalten. Und scheint es mir ausser Zweifel zu stehen, dass dieses Resultat weit zuverlässiger sei als alle Werthe, welche vorhergehende Bestimmungen für die Marsmasse ergeben hatten. H. S. Pritchett[3] macht zwar darauf aufmerksam, dass an dem Hall'schen Werth noch eine kleine Correctur anzubringen sei, und gibt den verbesserten Werth zu: $1:307\,5440$ an. Ich habe aber den jetzt allgemein adoptirten Hall'schen Werth beibehalten, weil mir die Möglichkeit nicht ausgeschlossen erscheint, dass der Hall'sche Werth selbst noch um einen grösseren Betrag, wie die erwähnte Verbesserung bedingt, von dem wahren Werthe der Masse des Planeten Mars entfernt sei.

Masse des Planeten Saturn. Der angenommene Werth ist der Bessel'sche,[4] welcher durch die neuesten Untersuchungen fast völlig bestätigt wird, denn H. Struve[5] findet für die Masse des Saturn in naher Übereinstimmung mit Bessel aus den Messungen Titan's und Japet's: $1:3498$. Ferner sei bemerkt, dass in neuerer Zeit M. Mayer[6] aus Trabantenmessungen zu einem etwas kleineren Werthe, A. Hall und L. de Ball[7] hingegen wieder zu etwas grösseren Werthen für die Saturnsmasse als Bessel gelangt sind. Bevor jedoch die Untersuchungen Struve's nicht geschlossen sind, schien es mir nicht gerathen von dem Bessel'schen Werth abzugehen.

---

[1] Stone, Transits of Venus 1882; vergl. auch Bulletin astronomique, tome V. Février 1888, p. 55.

[2] A. Hall, Observ. and orbits of the satellites of Mars. Washington 1878, p. 36.

[3] H. S. Pritchett, Astron. Nachr. S. 377. 1878.

[4] Bessel, Astron. Nachr. IX, S. 46 und 387. 1831.

[5] H. Struve, Beobachtungen des Saturns-Trabanten I. (Supplement I zu den Pulkovaer Beobachtungen.) St. Petersburg 1888; vergl. auch: Bulletin astronomique, tome V, Août 1888, p. 351.

[6] M. Mayer, Masse des Saturn. Astron. Nachr. S. 364. 1881.

[7] L. de Ball, Masse de la planète Saturn. Brüssel 1887.

Masse des Planeten Uranus. Die Störungen, welche der Komet Winnecke durch diesen Planeten in der mittleren Anomalie erfährt, steigen im Maximum bis 10″. Ich habe desshalb auch die erst angenommene Masse: 1:220 00 beibehalten, obwohl der von Newcomb gegebene Schlusswerth: 1:226 00 den Vorzug verdient. Es entstehen hieraus nur Fehler in der Darstellung der Normalorte unseres Kometen, kleiner wie die mögliche Unsicherheit letzterer.

Die Herleitung des Werthes: 1:226 00 findet man bei S. Newcomb, Washington, Observ. 1873, App. I.

Um eine Übersicht zu ermöglichen, ob und wie weit kleinere Abweichungen von denjenigen Werthen der Massen der störenden Planeten, auf die wir überzugehen uns entschlossen haben, noch von Belang sind, habe ich folgendes Täfelchen gerechnet. Bezeichnet man der Reihe nach mit ω☿, ω♀ u. s. w. jene Incremente, welche zeichengemäss an die Störungen durch Mercur, Venus u. s. w. in der mittleren Anomalie anzubringen sind, wenn man von den angenommenen Massen auf etwas veränderte übergehen will, so erhält man folgende Zahlen, wobei die Voraussetzung gemacht wurde, dass man:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| für Mercur | von dem Werth | 1:520 5000 | auf den Werth | 1:560 0000 [1] |
| „ Venus | „ „ „ | 1:412 150 | „ „ „ | 1:411 700 |
| „ Erde + Mond | „ „ „ | 1:322 883 | „ „ „ | 1:328 129 |
| „ Mars | „ „ „ | 1:309 3500 | „ „ „ | 1:307 5440 |
| „ Jupiter | „ „ „ | 1:1047.1752 | „ „ „ | 1:1047.1802 [1] |
| „ Saturn | „ „ „ | 1:3501.6 | „ „ „ | 1:3498.0 |
| „ Uranus | „ „ „ | 1:220 00 | „ „ „ | 1:226 00 übergehen wolle. |

| ω | 1858 März 17 | 1858 April 12 | 1858 Juni 12 | 1869 Mai 1 | 1869 Mai 12 | 1869 Juni 7 | 1869 Sept. 7 | 1875 Febr. 10 | 1886 Aug. 25 | 1886 Sept. 14 | 1886 Oct. 4 | 1886 Nov. 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mercur . . . . . | +1″01 | +1″02 | +1″04 | −0″06 | −0″06 | −0″09 | −0″09 | +0″01 | −0″98 | −0″98 | −0″98 | −0″97 |
| Venus . . . . . | −0·27 | −0·27 | −0·27 | −0·06 | −0·06 | −0·06 | −0·06 | 0·00 | +0·27 | +0·27 | +0·28 | +0·28 |
| Erde + Mond . . | −1·82 | −1·76 | −1·68 | +0·72 | +0·72 | +0·74 | +0·80 | +0·01 | +0·37 | +0·37 | +0·38 | +0·38 |
| Mars . . . . . . | +0·52 | +0·52 | +0·51 | +0·08 | +0·08 | +0·08 | +0·07 | 0·00 | −0·09 | −0·09 | −0·09 | −0·09 |
| Jupiter . . . . . | +0·36 | +0·35 | +0·34 | +0·03 | +0·03 | +0·03 | +0·03 | 0·00 | +0·03 | +0·03 | +0·03 | +0·03 |
| Saturn . . . . . | +0·06 | +0·06 | +0·06 | +0·10 | +0·10 | +0·10 | +0·10 | 0·00 | −0·01 | 0·00 | 0·00 | +0·01 |
| Uranus . . . . . | −0·27 | −0·27 | −0·27 | −0·08 | −0·08 | −0,08 | −0·08 | 0·00 | −0·02 | −0·02 | −0·02 | −0,02 |

Diese ω sind nicht nur an sich, sondern auch summirt so klein, dass sie die mögliche Unsicherheit der Störungswerthe nicht überschreiten. Ich glaube daher, dass man eine Reihe von Jahren mit den obigen Massenwerthen völlig ausreichen wird. Für die Mercursmasse werden wir in den folgenden Capiteln allerdings zeigen, dass schon heute der angenommene Werth: 1:520 5000 als ein wenig zu gross bezeichnet werden müsse. Ich behalte aber denselben vorderhand noch bei, da ich mich vielleicht in Kürze durch anderweitig erlangte Resultate veranlasst sehen könnte, auch noch für eine oder mehrere der übrigen Massen statt der hier angenommenen Werthe bessere zu substituiren. Bei successivem Übergang auf neuere Massen müssten aber nicht unbedeutende Rechnungen mehrmals wiederholt werden, die sich gleichzeitig ohne nennenswerthe Mehrarbeit erledigen lassen.

## III. Capitel.

### Über den Einfluss der Massenannahmen auf die Darstellung des Kometen Winnecke.

Da ich für Jupiter, Saturn und Uranus die Massenwerthe beibehalte, welche im ersten Theil meiner Untersuchungen über den Komet Winnecke angenommen worden waren, so sind die Zahlen, welche sich in der Tafel auf Seite 71 und 72 für deren Störungen angesetzt finden, unverändert zu belassen.

---

[1] Diese Werthe sind willkürlich angenommene.

Die Logarithmen der Venus-, Erd- und Marsstörungen müssen aber beziehungsweise erst um —0·011 0032, +0·041 7932, endlich —0·062 2607 Einheiten verändert werden, damit die neu adoptirten Massen eingeführt erscheinen. Selbstverständlich wurde diese Reduction für jedes Element in aller Strenge durchgeführt; ich beschränke mich in folgenden Bemerkungen aber nur auf die Betrachtung des Einflusses der $\omega$ — der Reductions-Incremente in der mittleren Anomalie — auf die Darstellung der Normalorte unseres Kometen, da die Darstellung nur um Hundertel Bogensecunden durch die, den fünf übrigen Elementen anzufügenden Incremente, verändert werden kann.

Die folgende Tabelle gibt die Werthe der $\omega$, wenn man übergeht:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| für | Venus | von dem erst angenommenen Werth | 1 : 401 839 | auf den Werth | 1 : 412 150 |
| „ | Erde + Mond | „ „ „ „ „ | 1 : 355 499 | „ „ „ | 1 : 322 883 |
| „ | Mars | „ „ „ „ „ | 1 : 268 0337 | „ „ „ | 1 : 309 3500 |

| $\omega$ | 1858 März 17 | 1858 April 12 | 1858 Juni 12 | 1869 Mai 1 | 1869 Mai 12 | 1869 Juni 7 | 1869 Sept. 7 | 1875 Febr. 10 | 1886 Aug. 25 | 1886 Sept. 14 | 1886 Oct. 4 | 1886 Nov. 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Venus . . . . . . | + 6″40 | + 6″38 | + 6″28 | + 1″39 | + 1″37 | + 1″33 | + 1″27 | 0″00 | — 6″43 | — 6″47 | — 6″51 | — 6″55 |
| Erde + Mond . . . | +10·41 | +10·10 | + 9·63 | — 4·11 | — 4·13 | — 4·25 | — 4·59 | — 0·04 | — 2·09 | — 2·12 | — 2·15 | — 2·16 |
| Mars . . . . . . . | —13·65 | —13·54 | —13·31 | — 2·11 | — 2·09 | — 2·05 | — 1·90 | 0·00 | + 2·23 | + 2·28 | + 2·32 | + 2·40 |
| Summe . . . . . . | + 3″16 | + 2″94 | + 2″60 | — 4″83 | — 4″85 | - 4″97 | — 5″28 | — 0″04 | — 6″29 | — 6″31 | — 6″34 | — 6″31 |

Im geocentrischen Ort hingegen entstehen folgende, im Sinne: Beob.—Rechn. angesetzte Differenzen:

| Geoc. Ort. | | 1858 März 17 | 1858 April 12 | 1858 Juni 12 | 1869 Mai 1 | 1869 Mai 12 | 1869 Juni 7 | 1869 Sept. 7 | 1875 Febr. 10 | 1886 Aug. 25 | 1886 Sept. 14 | 1886 Oct. 4 | 1886 Nov. 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Venus | $\Delta AR \cos D$ | —61″52 | —32″38 | — 7″90 | — 1″91 | + 0″20 | +11″13 | — 1″84 | 0″00 | +14″99 | +21″26 | +32″81 | +34″67 |
| | $\Delta D$ | +23·90 | +17·83 | — 0·25 | — 4·33 | — 5·30 | — 8·59 | — 4·96 | 0·00 | —14·28 | —21·90 | —23·62 | + 0·82 |
| Erde + Mond | $\Delta AR \cos D$ | -100·07 | —51·26 | —12·12 | + 5·64 | — 0·59 | —35·57 | + 6·66 | + 0·20 | + 4·87 | + 6·97 | +10·84 | +11·43 |
| | $\Delta D$ | +38·87 | +28·22 | — 0·39 | +12·80 | +15·99 | +27·46 | +17·93 | — 0·03 | — 4·64 | — 7·17 | — 7·80 | + 0·27 |
| Mars | $\Delta AR \cos D$ | +131·22 | +68·72 | +16·75 | + 2·90 | — 0·30 | —17·15 | + 2·84 | 0·00 | — 5·20 | — 7·49 | —11·69 | —12·70 |
| | $\Delta D$ | —50·97 | —37·83 | + 0·53 | + 6·57 | + 8·09 | +13·25 | + 7·66 | 0·00 | + 4·95 | + 7·72 | + 8·42 | — 0.30 |

Die Zahlen dieser Tafel illustriren gut die Abhängigkeit der Darstellung von den Massenannahmen. Man sieht, dass etwas schlechtere Annahmen für die drei Planetenmassen Fehler im geocentrischen Ort sogar im Betrage von Minuten hervorbringen können, ohne dass die Störungen selbst grössere zu sein brauchen.

Da man auf diesen Umstand, wenigstens meines Erachtens, noch zu wenig Rücksicht genommen hat, erlaube ich mir hieran noch einige weitere Bemerkungen zu knüpfen.

Vorerst wird man zu dem Schluss geführt, dass es nicht nur wünschenswerth sei, sondern in manchen Fällen sogar geboten, bei Störungsrechnungen für periodische Kometen die Störungen aller berücksichtigten Planeten nicht vereint zu summiren, sondern für jeden störenden Planeten die Integration getrennt durchzuführen, weil man nur so jederzeit in der Lage ist, irgend einen anderen Massenwerth einzuführen, der sich durch anderweitige Untersuchungen als entschieden besser ergeben hat. Die Möglichkeit, dass aber für jeden Kometen ein Moment kommen kann, wo ein solcher Übergang höchst nothwendig wird, glaube ich wird Niemand ausschliessen können, einerseits deshalb, weil die besten Annahmen über die Massen, die wir heute zu machen im Stande sind, noch lange nicht das Mass der Genauigkeit besitzen, das hier erforderlich ist,

andererseits auch die Störungen für einen längeren Zeitraum so anwachsen können, dass eine kleine Massencorrectur die Darstellung der geocentrischen Orte schon um grössere Beträge alterirt.

Für den Komet Winnecke werden wir weiter unten sehen, dass der Einfluss der veränderten Massenannahmen sich mit den neu hinzugekommenen Mercursstörungen nahezu compensirt. Es ist dieses aber ein Spiel des Zufalls und nur diesem zuzuschreiben, dass ich im ersten Theil zu Resultaten — wenigstens für die Jupitersmasse — gelangt bin, die auch weiter völlig aufrecht bleiben.

Der Bearbeitung des Kometen Faye liegen aber heute noch ältere Massenwerthe zu Grunde, so:

$$\text{Venus} = 1:401\,839, \quad \text{Erde} + \text{Mond} = 1:355\,499, \quad \text{Mars} = 1:268\,0337.$$

Ist nicht vielleicht hierin allein der Grund zu suchen, dass die Elemente den Beobachtungen während der letzten Erscheinungen nicht mehr genügt haben? Es scheint mir dieses allerdings heute noch sehr fraglich, jedenfalls glaube ich aber, können die hier gemachten Bemerkungen auch zur Erklärung hiefür herangezogen werden, dass wir nicht im Stande waren[1] mit unserer Jupitersmasse die Beobachtung des Kometen Faye gleich gut darzustellen, wie unter Annahme eines kleineren Werthes. Auch die Massen der äusseren Planeten wären bei diesem Kometen noch zu berücksichtigen.

Für den Encke'schen Kometen wäre in erster Reihe die angenommene Venusmasse (ebenfalls 1 : 401 839) in Betracht zu ziehen. Ausdrücklich will ich aber hervorheben, dass hiemit der Ausnahmsfall in der Bewegung dieses Kometen, die Abnahme der Umlaufszeit, nicht im Geringsten in Frage gestellt erscheint, da nach Asten die empyrischen Störungen für 1819 z. B. $+3°31'$ betragen, also nahe gleich gross sind, wie der störende Einfluss sämmtlicher Planeten ($+4°24'$), während durch Übergang auf neuere Massen nur Incremente von einigen Secunden entstehen können.

## IV. Capitel.

### Zusammenstellung der Störungen und der Elemente.

Den weiteren Rechnungen ist folgendes Elementensystem zu Grunde gelegt worden:

Ausgangselemente für die Störungstafel.

Ep. u. Osc. 1875 März 11·0 mittl. Berl. Zeit.

$$\begin{aligned} M &= 359°\ 48'\ 15''20 \\ \pi &= 276\ \ 41\ \ 55·62 \\ \Omega &= 111\ \ 33\ \ 38·33 \\ i &= \ 11\ \ 17\ \ \ 5·97 \\ \varphi &= \ 47\ \ 48\ \ 58·82 \\ \mu &= 619''584\ 6639 \end{aligned} \quad \left.\begin{matrix} \\ \pi \\ \Omega \\ i \end{matrix}\right\} \text{mittl. Äq. } 1880·0$$

Vergleicht man diese Elemente mit den Schlusselementen im ersten Theile (S. 83), so sieht man, dass die ersten fünf unverändert beibehalten wurden. Die mittlere Bewegung ($\mu$) wurde aber um $-0''001\,8000$ verkleinert, weil ich mich durch eine rohe Versuchsrechnung überzeugt habe, dass eine solche Correction angebracht werden müsse, wahrscheinlich allein schon ausreichend sei, um die Normalorte mit den neu adoptirten Massen und den hinzutretenden Mercursstörungen befriedigend darstellen zu können.

Um jede Verwechslung auszuschliessen, setze ich nochmals die neu angenommenen Massenwerthe hier an:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Masse des Mercur | = 1 : 520 5000 | Masse des Jupiter | = 1 : 1047·1752 |
| „ der Venus | = 1 : 412 150 | „ „ Saturn | = 1 : 3501·6 |
| „ Erde + Mond | = 1 : 322 883 | „ „ Uranus | = 1 : 220 00 |

Masse des Mars = 1 : 309 3500.

Die folgende Tafel gibt endlich die auf diese Massen reducirten Störungswerthe:

[1] Vergleiche I. Theil, S. 91 [303].

**Störungen von Osculationsepoche**

| τ | | —6203·0 | —6177·0 | —6116·0 | —2140·0 | —2129·0 | —2103·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0h mittl. Berl. Zeit | | 1858 März 17·0 | 1858 April 12·0 | 1858 Juni 12·0 | 1869 Mai 1·0 | 1869 Mai 12·0 | 1869 Juni 7·0 |
| Mittl. Äquinoctium | | 1858·0 | 1858·0 | 1858·0 | 1869·0 | 1869·0 | 1869·0 |
| ΔM | ☿ | — 0° 0' 14"37 | — 0° 0' 14"46 | — 0° 0' 14"64 | + 0° 0' 0"83 | + 0° 0' 0"97 | + 0° 0' 1"24 |
| | ♀ | — 0 4 9·54 | — 0 4 8·43 | — 0 4 4·54 | — 0 0 54·08 | — 0 0 53·44 | — 0 0 51·77 |
| | ♁ | + 0 1 53·46 | + 0 1 50·12 | + 0 1 44·96 | — 0 0 44·81 | — 0 0 45·00 | — 0 0 46·36 |
| | ♂ | + 0 1 28·52 | + 0 1 27·81 | + 0 1 26·34 | + 0 0 13·71 | + 0 0 13·56 | + 0 0 13·33 |
| | ♃ | —20 24 4·02 | —20 15 46·44 | —19 56 17·30 | — 2 4 17·65 | — 2 1 32·68 | — 1 55 2·94 |
| | ♄ | + 0 0 57·62 | + 0 0 57·91 | + 0 0 58·64 | + 0 1 32·14 | + 0 1 32·32 | + 0 1 32·46 |
| | ♅ | + 0 0 10·34 | + 0 0 10·28 | + 0 0 10·14 | + 0 0 3·20 | + 0 0 3·18 | + 0 0 3·17 |
| ΣΔM | | —20°23'57"99 | —20°15'43"21 | —19°56'16"40 | — 2° 4' 6"66 | — 2° 1'21"09 | — 1°54'50"87 |
| Δπ | ☿ | — 0° 0' 0"25 | — 0° 0' 0"27 | — 0° 0' 0"15 | — 0° 0' 0"31 | — 0° 0' 0"51 | — 0° 0' 0"57 |
| | ♀ | — 0 0 1·50 | — 0 0 1·60 | — 0 0 2·76 | + 0 0 1·20 | + 0 0 0·95 | + 0 0 0·21 |
| | ♁ | + 0 0 27·38 | + 0 0 29·21 | + 0 0 30·30 | + 0 0 24·76 | + 0 0 24·17 | + 0 0 22·37 |
| | ♂ | — 0 0 3·46 | — 0 0 3·50 | — 0 0 3·47 | — 0 0 1·43 | — 0 0 1·34 | — 0 0 1·29 |
| | ♃ | — 0 44 44·85 | — 0 44 46·66 | — 0 44 47·51 | — 0 37 26·10 | — 0 37 26·58 | — 0 37 27·11 |
| | ♄ | + 0 0 0·42 | + 0 0 0·42 | + 0 0 0·41 | — 0 0 16·78 | — 0 0 16·84 | — 0 0 16·95 |
| | ♅ | — 0 0 2·57 | — 0 0 2·57 | — 0 0 2·57 | — 0 0 0·73 | — 0 0 0·73 | — 0 0 0·73 |
| Präcession | | — 0 18 26·28 | — 0 18 26·28 | — 0 18 26.28 | — 0 9 13·13 | — 0 9 13·13 | — 0 9 13·13 |
| ΣΔπ | | — 1° 2'51"11 | — 1° 2'51"25 | — 1° 2'52"03 | — 0°46'32"52 | — 0°46'34"01 | — 0°46'37"20 |
| ΔΩ | ☿ | + 0° 0' 0"16 | + 0° 0' 0"10 | + 0° 0' 0"09 | + 0° 0' 0"11 | + 0° 0' 0"04 | + 0° 0' 0"06 |
| | ♀ | — 0 0 0·90 | — 0 0 1·12 | — 0 0 1·22 | + 0 0 0·92 | + 0 0 0·78 | + 0 0 0·58 |
| | ♁ | + 0 0 13·93 | + 0 0 12·91 | + 0 0 12·69 | + 0 0 8·59 | + 0 0 8·09 | + 0 0 6·78 |
| | ♂ | + 0 0 10·28 | + 0 0 10·09 | + 0 0 10·09 | + 0 0 3·16 | + 0 0 3·07 | + 0 0 3·04 |
| | ♃ | + 2 15 57·95 | + 2 15 57·00 | + 2 15 56·80 | + 2 8 7·11 | + 2 8 6·55 | + 2 8 5·37 |
| | ♄ | + 0 0 13·20 | + 0 0 13·20 | + 0 0 13·20 | + 0 0 4·22 | + 0 0 4·20 | + 0 0 4·18 |
| | ♅ | + 0 0 1·22 | + 0 0 1·22 | + 0 0 1.22 | + 0 0 0·02 | + 0 0 0·02 | + 0 0 0·02 |
| Präcession | | — 0 17 38·85 | — 0 17 38·85 | — 0 17 38·85 | — 0 8 49·41 | — 0 8 49·41 | — 0 8 49·41 |
| ΣΔΩ | | + 1°58'56"99 | + 1°58'54"55 | + 1°58'54"02 | + 1°59'34"72 | + 1°59'33"34 | + 1°59'30"62 |
| Δi | ☿ | — 0° 0' 0"06 | — 0° 0' 0"05 | — 0° 0' 0"06 | — 0° 0' 0"02 | — 0° 0' 0"02 | — 0° 0' 0"02 |
| | ♀ | + 0 0 0·69 | + 0 0 0·70 | + 0 0 0·74 | + 0 0 0·06 | + 0 0 0·06 | + 0 0 0·06 |
| | ♁ | — 0 0 0·32 | — 0 0 0·27 | — 0 0 0·23 | — 0 0 0·36 | — 0 0 0·37 | — 0 0 0·29 |
| | ♂ | + 0 0 1·03 | + 0 0 1·03 | + 0 0 1·04 | + 0 0 0·29 | + 0 0 0·28 | + 0 0 0·28 |
| | ♃ | — 0 28 59·41 | — 0 28 59·36 | — 0 28 59·22 | — 0 28 48·30 | — 0 28 48·31 | — 0 28 48·25 |
| | ♄ | — 0 0 1·44 | — 0 0 1·44 | — 0 0 1·44 | — 0 0 0·77 | — 0 0 0·77 | — 0 0 0·77 |
| | ♅ | — 0 0 0·51 | — 0 0 0·51 | — 0 0 0·51 | + 0 0 0·05 | + 0 0 0·05 | + 0 0 0·05 |
| Präcession | | + 0 0 5·00 | + 0 0 5·00 | + 0 0 5·00 | + 0 0 2·50 | + 0 0 2·50 | + 0 0 2·50 |
| ΣΔi | | — 0°28'55"02 | — 0°28'54"90 | — 0°28'54"68 | — 0°28'46"55 | — 0°28'46"58 | — 0°28'46"44 |
| Δφ | ☿ | — 0° 0' 0"12 | — 0° 0' 0"26 | + 0° 0' 0"09 | — 0° 0' 0"38 | — 0° 0' 0"31 | + 0° 0' 0"06 |
| | ♀ | — 0 0 2·62 | — 0 0 3·33 | — 0 0 3·73 | — 0 0 4·37 | — 0 0 4·47 | — 0 0 4·26 |
| | ♁ | + 0 0 6·22 | + 0 0 5·05 | + 0 0 4·06 | + 0 0 5·26 | + 0 0 6·25 | + 0 0 9·63 |
| | ♂ | + 0 0 1·03 | + 0 0 0·92 | + 0 0 0·85 | + 0 0 0·32 | + 0 0 0·28 | + 0 0 0·19 |
| | ♃ | + 1 11 37·85 | + 1 11 37·27 | + 1 11 33·08 | + 0 56 19·28 | + 0 56 18·73 | + 0 56 16·37 |
| | ♄ | + 0 0 7·85 | + 0 0 7·86 | + 0 0 7·86 | + 0 0 5·68 | + 0 0 5·70 | + 0 0 5·74 |
| | ♅ | + 0 0 0·15 | + 0 0 0·15 | + 0 0 0·15 | + 0 0 1·05 | + 0 0 1·05 | + 0 0 1·05 |
| ΣΔφ | | + 1°11'50"36 | + 1°11'47"66 | + 1°11'42"36 | + 0°56'26"84 | + 0°56'27"23 | + 0°56'28"78 |
| Δμ | ☿ | + 0"004 4693 | + 0"006 0557 | + 0"001 7105 | + 0"004 7176 | + 0"003 5681 | — 0"000 7771 |
| | ♀ | + 0·049 9858 | + 0·058 2059 | + 0·064 1996 | + 0·058 8746 | + 0·059 1618 | + 0·055 2092 |
| | ♁ | — 0·108 4794 | — 0·090 7883 | — 0·078 8472 | — 0·079 8180 | — 0·092 6177 | — 0·136 0483 |
| | ♂ | — 0·025 7285 | — 0·024 8592 | — 0·023 6317 | — 0·008 1616 | — 0·007 2837 | — 0·006 4516 |
| | ♃ | +19·136 8414 | +19·140 0573 | +19·191 2256 | +15·014 8477 | +15·019 6781 | +15·046 1353 |
| | ♄ | + 0·011 8200 | + 0·011 7000 | + 0·011 7200 | + 0·006 5200 | + 0·005 5300 | + 0·004 9700 |
| | ♅ | — 0·000 0420 | — 0·000 0300 | + 0·000 0060 | + 0·000 5580 | + 0·000 5400 | + 0·000 5220 |
| ΣΔμ | | +19"068 8666 | +19"100 3414 | +19"166 3828 | +14"997 5383 | +14"988 5766 | +14"963 5595 |

**1875 März 11·0 mittl. Berl. Zeit bis:**

| τ | | −2011·0 | −29·0 | +4185·0 | +4205·0 | +4225·0 | +4265·0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0h mittl. Berl. Zeit | | 1869 Sept. 7·0 | 1875 Febr. 10·0 | 1886 Aug. 25·0 | 1886 Sept. 14·0 | 1886 Oct. 4·0 | 1886 Nov. 13·0 |
| Mittl. Äquinoctium | | 1869·0 | 1880·0 | 1890·0 | 1890·0 | 1890·0 | 1890·0 |
| ΔM | ☿ | + 0° 0' 1".27 | − 0° 0' 0".14 | + 0° 0' 13".96 | + 0° 0' 13".98 | + 0° 0' 13".95 | + 0° 0' 13".73 |
| | ♀ | − 0 0 49.51 | − 0 0 0.04 | + 0 4 10.78 | + 0 4 12.31 | + 0 4 13.63 | + 0 4 15.16 |
| | ♁ | − 0 0 50.07 | − 0 0 0.41 | − 0 0 22.76 | − 0 0 23.10 | − 0 0 23.44 | − 0 0 23.55 |
| | ♂ | + 0 0 12.71 | + 0 0 0.01 | − 0 0 14.48 | − 0 0 14.78 | − 0 0 15.04 | − 0 0 15.54 |
| | ♃ | − 1 32 0.74 | + 0 0 0.82 | − 1 53 58.03 | − 1 57 10.75 | − 2 0 23.86 | − 2 6 52.83 |
| | ♄ | + 0 1 33.03 | − 0 0 0.05 | − 0 0 6.29 | − 0 0 3.45 | − 0 0 0.59 | + 0 0 5.26 |
| | ♅ | + 0 0 3.15 | − 0 0 0.01 | + 0 0 0.72 | + 0 0 0.70 | + 0 0 0.69 | + 0 0 0.65 |
| ΣΔM | | − 1° 31' 50".16 | + 0° 0' 0".18 | − 1° 50' 16".10 | − 1° 53' 25".09 | − 1° 56' 34".66 | − 2° 2' 57".12 |
| Δπ | ☿ | − 0° 0' 0".37 | + 0° 0' 0".21 | + 0° 0' 0".23 | + 0° 0' 0".13 | + 0° 0' 0".10 | + 0° 0' 0".40 |
| | ♀ | + 0 0 0.51 | − 0 0 1.06 | − 0 0 2.34 | − 0 0 2.79 | − 0 0 3.08 | − 0 0 2.66 |
| | ♁ | + 0 0 6.14 | + 0 0 0.17 | + 0 0 1.90 | + 0 0 2.22 | + 0 0 2.62 | + 0 0 3.03 |
| | ♂ | − 0 0 1.25 | − 0 0 0.03 | − 0 0 2.88 | − 0 0 2.90 | − 0 0 2.92 | − 0 0 2.92 |
| | ♃ | − 0 37 20.72 | − 0 0 0.72 | − 0 40 45.86 | − 0 40 45.21 | − 0 40 44.43 | − 0 40 42.34 |
| | ♄ | − 0 0 16.99 | 0 0 0.00 | + 0 0 8.64 | + 0 0 8.56 | + 0 0 8.47 | + 0 0 8.25 |
| | ♅ | − 0 0 0.73 | 0 0 0.00 | − 0 0 1.16 | − 0 0 1.16 | − 0 0 1.16 | − 0 0 1.16 |
| Präcession | | − 0 9 13.13 | 0 0 0.00 | + 0 8 22.84 | + 0 8 22.84 | + 0 8 22.84 | + 0 8 22.84 |
| ΣΔπ | | − 0° 46' 46".54 | − 0° 0' 1".43 | − 0° 32' 18".63 | − 0° 32' 18".31 | − 0° 32' 17".56 | − 0° 32' 14".56 |
| Δ☊ | ☿ | + 0° 0' 0".02 | + 0° 0' 0".04 | + 0° 0' 0".07 | + 0° 0' 0".06 | + 0° 0' 0".05 | + 0° 0' 0".01 |
| | ♀ | + 0 0 0.19 | + 0 0 0.02 | − 0 0 0.38 | − 0 0 0.39 | − 0 0 0.43 | − 0 0 0.79 |
| | ♁ | + 0 0 3.21 | − 0 0 0.07 | − 0 0 0.33 | − 0 0 0.34 | − 0 0 0.36 | − 0 0 0.36 |
| | ♂ | + 0 0 3.02 | + 0 0 0.02 | − 0 0 3.98 | − 0 0 3.99 | − 0 0 3.99 | − 0 0 3.99 |
| | ♃ | + 2 8 2.99 | + 0 0 0.41 | − 7 33 27.46 | − 7 33 27.48 | − 7 33 27.60 | − 7 33 28.82 |
| | ♄ | + 0 0 4.17 | − 0 0 0.01 | − 0 0 36.89 | − 0 0 36.89 | − 0 0 36.89 | − 0 0 36.90 |
| | ♅ | + 0 0 0.02 | 0 0 0.00 | − 0 0 0.24 | − 0 0 0.24 | − 0 0 0.24 | − 0 0 0.25 |
| Präcession | | − 0 8 49.41 | 0 0 0.00 | + 0 8 1.27 | + 0 8 1.27 | + 0 8 1.27 | + 0 8 1.27 |
| ΣΔ☊ | | + 1° 59' 24".21 | + 0° 0' 0".41 | − 7° 26' 7".94 | − 7° 26' 8".00 | − 7° 26' 8".19 | − 7° 26' 9".83 |
| Δi | ☿ | − 0° 0' 0".01 | 0° 0' 0".01 | − 0° 0' 0".01 | + 0° 0' 0".01 | 0° 0' 0".00 | − 0° 0' 0".01 |
| | ♀ | 0 0 0.00 | − 0 0 0.01 | − 0 0 0.05 | − 0 0 0.05 | 0 0 0.07 | − 0 0 0.13 |
| | ♁ | − 0 0 0.02 | + 0 0 0.02 | − 0 0 0.03 | − 0 0 0.03 | 0 0 0.03 | − 0 0 0.15 |
| | ♂ | + 0 0 0.28 | 0 0 0.00 | − 0 0 0.30 | − 0 0 0.29 | − 0 0 0.29 | − 0 0 0.29 |
| | ♃ | − 0 28 48.38 | − 0 0 0.09 | + 3 14 12.48 | + 3 14 12.51 | + 3 14 12.43 | + 3 14 12.24 |
| | ♄ | − 0 0 0.77 | 0 0 0.00 | + 0 0 24.61 | + 0 0 24.61 | + 0 0 24.61 | + 0 0 24.61 |
| | ♅ | + 0 0 0.05 | 0 0 0.00 | − 0 0 0.42 | − 0 0 0.42 | − 0 0 0.42 | − 0 0 0.42 |
| Präcession | | + 0 0 2.50 | 0 0 0.00 | − 0 0 2.27 | − 0 0 2.27 | − 0 0 2.27 | − 0 0 2.27 |
| ΣΔi | | − 0° 28' 46".35 | − 0° 0' 0".09 | + 3° 14' 34".01 | + 3° 14' 34".07 | + 3° 14' 33".96 | + 3° 14' 33".58 |
| Δφ | ☿ | − 0° 0' 0".08 | − 0° 0' 0".31 | − 0° 0' 0".01 | − 0° 0' 0".21 | + 0° 0' 0".01 | + 0° 0' 0".17 |
| | ♀ | − 0 0 1.14 | − 0 0 0.40 | − 0 0 5.96 | − 0 0 5.75 | − 0 0 5.30 | − 0 0 3.92 |
| | ♁ | + 0 0 2.36 | − 0 0 0.89 | + 0 0 1.06 | + 0 0 1.00 | + 0 0 0.96 | + 0 0 0.21 |
| | ♂ | + 0 0 0.19 | + 0 0 0.02 | + 0 0 0.74 | + 0 0 0.64 | + 0 0 0.58 | + 0 0 0.52 |
| | ♃ | + 0 56 17.05 | + 0 0 2.33 | − 1 16 11.23 | − 1 16 11.46 | − 1 16 10.38 | − 1 16 6.86 |
| | ♄ | + 0 0 5.59 | − 0 0 0.11 | + 0 1 19.73 | + 0 1 19.77 | + 0 1 19.73 | + 0 1 19.56 |
| | ♅ | + 0 0 1.05 | 0 0 0.00 | − 0 0 1.85 | − 0 0 1.85 | − 0 0 1.85 | − 0 0 1.84 |
| ΣΔφ | | + 0° 56' 25".02 | + 0° 0' 0".64 | − 1° 14' 57".52 | − 1° 14' 57".86 | − 1° 14' 56".25 | − 1° 14' 52".16 |
| Δμ | ☿ | + 0".001 0392 | + 0".003 7566 | + 0".003 5267 | + 0".005 8028 | + 0".003 3474 | + 0".000 9150 |
| | ♀ | + 0.015 4539 | + 0.003 4709 | + 0.074 6905 | + 0.072 4483 | + 0.067 7341 | + 0.052 3368 |
| | ♁ | − 0.037 8450 | + 0.010 5119 | − 0.015 8345 | − 0.015 2267 | − 0.015 0751 | − 0.008 1099 |
| | ♂ | − 0.006 6350 | − 0.000 2361 | − 0.015 3421 | − 0.014 2637 | 0.013 6453 | − 0.013 0369 |
| | ♃ | + 15.025 1695 | − 0.027 5096 | − 9 634 2534 | − 9 631 6378 | − 9.644 2400 | − 9.685 3223 |
| | ♄ | + 0.006 6500 | + 0.001 3100 | + 0.141 7695 | + 0.141 3555 | + 0.141 8375 | + 0.144 1335 |
| | ♅ | + 0.000 5700 | + 0.000 0540 | − 0 000 8896 | − 0.000 8816 | − 0.000 8738 | − 0.000 9520 |
| ΣΔμ | | + 15".004 4026 | − 0".008 6423 | − 9".446 3329 | 9".442 4032 | − 9".460 9152 | − 9".510 0358 |

Bringt man diese Störungen an die obigen Elemente an, so erhält man folgende für die Normalortstage osculirende Elemente:

## 1858.

| Ep. u. Osc. 1858 März 17·0 | Ep. u. Osc. 1858 April 12·0 | Ep. u. Osc. 1858 Juni 12·0 |
|---|---|---|
| M = 351°49'33"54 | M = 356°26'17"52 | M = 7°15'39"00 |
| π = 275 39 4·51 (mittl. Äq. 1858·0) | π = 275 39 4·37 (mittl. Äq. 1858·0) | π = 275 39 3·59 (mittl. Äq. 1858·0) |
| ☊ = 113 32 35·32 | ☊ = 113 32 32·88 | ☊ = 113 32 32·35 |
| i = 10 48 10·95 | i = 10 48 11·07 | i = 10 48 11·29 |
| φ = 49 0 49·18 | φ = 49 0 46·48 | φ = 49 0 41·18 |
| μ = 638"653 5305 | μ = 638"685 0053 | μ = 638"751 0407 |

## 1869.

| Ep. u. Osc. 1869 Mai 1·0 | Ep. u. Osc. 1869 Mai 12·0 | Ep. u. Osc. 1869 Juni 7·0 | Ep. u. Osc. 1869 Sept. 7·0 |
|---|---|---|---|
| M = 349°25'37"30 | M = 351°21'58"36 | M = 355°56'57"78 | M = 12°10' 0"28 |
| π = 275 55 23·10 (mittl. Äq. 1869·0) | π = 275 55 21·61 (mittl. Äq. 1869·0) | π = 275 55 18·42 (mittl. Äq. 1869·0) | π = 275 55 9·08 (mittl. Äq. 1869·0) |
| ☊ = 113 33 13·05 | ☊ = 113 33 11·67 | ☊ = 113 33 8·95 | ☊ = 113 33 2·54 |
| i = 10 48 19·42 | i = 10 48 19·39 | i = 10 48 19·53 | i = 10 48 19·62 |
| φ = 48 45 25·66 | φ = 48 45 26·05 | φ = 48 45 27·60 | φ = 48 45 23·84 |
| μ = 634"582 2022 | μ = 634"573 2405 | μ = 634"548 2234 | μ = 634"589 0665 |

## 1875.

| Ep. u. Osc. 1875 Febr. 10·0 |
|---|
| M = 354°48'47"42 |
| π = 276 41 54·19 (mittl. Äq. 1880·0) |
| ☊ = 111 33 38·74 |
| i = 11 17 5·88 |
| φ = 47 48 59·46 |
| μ = 619"570 0216 |

## 1886.

| Ep. u. Osc. 1886 Aug. 25·0 | Ep. u. Osc. 1886 Sept. 14·0 | Ep. u. Osc. 1886 Oct. 4·0 | Ep. u. Osc. 1886 Nov. 13·0 |
|---|---|---|---|
| M = 358°14' 0"92 | M = 1°37'23"62 | M = 5° 0'45"74 | M = 11°47'20"67 |
| π = 276 9 36·99 (mittl. Äq. 1890·0) | π = 276 9 37·31 (mittl. Äq. 1890·0) | π = 276 9 38·06 (mittl. Äq. 1890·0) | π = 276 9 41·06 (mittl. Äq. 1890·0) |
| ☊ = 104 7 30·39 | ☊ = 104 7 30·33 | ☊ = 104 7 30·14 | ☊ = 104 7 28·50 |
| i = 14 31 39·98 | i = 14 31 40·04 | i = 14 31 39·93 | i = 14 31 39·55 |
| φ = 46 34 1·30 | φ = 46 34 0·96 | φ = 46 34 2·57 | φ = 46 34 6·66 |
| μ = 610"138 3310 | μ = 610"142 2607 | μ = 610"123 7487 | μ = 610"074 6281 |

Rechnet man mit diesen Elementen (siebenstellig) neuerdings die Darstellung der Normalorte, so erübrigen folgende Differenzen:

| | | | Beob.—Rechn. Δ AR cos D | Δ D |
|---|---|---|---|---|
| 1858 | März | 17 | −2"54 | +2"41 |
| | April | 12 | +6·30 | −3·75 |
| | Juni | 12 | −4·12 | −0·56 |
| 1869 | Mai | 1 | −1·91 | +4·28 |
| | Mai | 12 | −1·60 | +2·88 |
| | Juni | 7 | 6·82 | −4·00 |
| | Sept. | 7 | +2·91 | −4·07 |

| | | | Beob.—Rechn. Δ AR cos D | Δ D |
|---|---|---|---|---|
| 1875 | Febr. | 10 | −1"90 | −4"42 |
| 1886 | Aug. | 25 | +3·49 | +0·68 |
| | Sept. | 14 | −0·20 | +4·78 |
| | Oct. | 4 | −0·20 | +7·04 |
| | Nov. | 13 | +0·18 | +8·22 |

Diese Darstellung ist nicht minder befriedigend, wie die Schlussdarstellung im ersten Theil (S. 86 [298]). Die vorstehenden Elemente wurden demnach auch der schon begonnenen Vorausberechnung zu Grunde gelegt.

Ich habe aber trotzdem noch einmal eine Auflösung der Normalgleichungen vorgenommen, erstens weil ich mich überzeugen wollte, wie weit sich obige Fehler noch herabdrücken lassen, ferner wie weit jener Werth, den wir für die Jupitersmasse erhalten hatten, beeinflusst würde, endlich weil ich durch einen rohen Versuch zur Überzeugung gekommen war, dass es nicht aussichtslos sei, auch für die Masse des Planeten Mercur eine Neubestimmung vorzunehmen.

Die Coëfficienten zur Verbesserung der Masse des Planeten Mercur wurden auf gleiche Weise wie für Jupiter berechnet.

An die sechs Verticalzeilen links vom Gleichheitszeichen von Seite 77 [289] (I. Theil) sind demnach noch folgende zwei Verticalreihen zu fügen, wovon die erste für Jupiter, die zweite für Mercur gilt, während man rechts für die $\sigma$ und $\tau$ obige $\Delta AR\cos D$ und $\Delta D$ zu substituiren hat.

Bedingungsgleichungen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| . . . | $+5_n84882\ \frac{m}{n}$ | $+2_n14032\ \frac{m_1}{n_1}$ | $=0_n40483$ |
| . . . | $+5_n56850$ | $1_n80566$ | $=0·79934$ |
| . . . | $+4_n95584$ | $1_n26539$ | $=0_n61490$ |
| . . . | $+4_n01043$ | $0·05690$ | $=0_n28103$ |
| . . . | $+3·02117$ | $9_n14505$ | $=0_n20412$ |
| . . . | $+4·76168$ | $1_n01606$ | $=0_n83378$ |
| . . . | $+3_n90357$ | $0·26536$ | $=0·46389$ |
| . . . | $+0·60761$ | $9_n83977$ | $=0_n27875$ |
| . . . | $+4_n20258$ | $1·51254$ | $=0·54283$ |
| . . . | $+4_n36375$ | $1·60225$ | $=9_n30103$ |
| . . . | $+4_n56118$ | $1·84697$ | $=9_n30103$ |
| . . . | $+4_n60532$ | $1·86144$ | $=0·79099$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| . . . | $+5·43817\ \frac{m}{n}$ | $+1·72967\ \frac{m_1}{n_1}$ | $=0·38202$ |
| . . . | $+5·30923$ | $1·60639$ | $=0_n57403$ |
| . . . | $+3_n45897$ | $9_n76852$ | $=9_n74819$ |
| . . . | $+4_n36603$ | $0·41250$ | $=0·63144$ |
| . . . | $+4_n45078$ | $0·57466$ | $=0·45939$ |
| . . . | $+4_n64940$ | $0·90378$ | $=0_n60853$ |
| . . . | $+4_n33379$ | $0·69558$ | $=0_n66932$ |
| . . . | $+9_n85515$ | $9·08731$ | $=0_n64542$ |
| . . . | $+4·18155$ | $1_n49151$ | $=9·83251$ |
| . . . | $+4·37047$ | $1_n67497$ | $=0·67943$ |
| . . . | $+4·41833$ | $1_n70412$ | $=0·84757$ |
| . . . | $+2_n98137$ | $0·23749$ | $=0·91487$ |

Führt man als Fehlereinheit den Werth ein, dessen Logarithmus $=0·91487$ ist und als neue Unbekannte:

$$x_1 = 0·98286\ \partial M_0$$
$$x_2 = 4·77266\ \partial \mu_0$$
$$x_3 = 0·71247\ \partial \varphi$$
$$x_4 = 0·21430\ \partial \pi'$$
$$x_5 = 0·36159\ \sin i' \partial \Omega'$$
$$x_6 = 0·01333\ \partial i'$$
$$x_7 = 5·84882\ \frac{m}{n}$$
$$x_8 = 2·14032\ \frac{m}{n_1}$$

so nehmen die obigen homogen gemachten Gleichungen die Form an:

$$a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 + d_i x_4 + e_i x_5 + f_i x_6 + g_i x_7 + h_i x_8 = n_i.$$

Die numerischen Werthe der Coëfficienten finden sich für die ersten sieben Unbekannten schon auf Seite 80[292] angesetzt, für $h$, $n$ und $s$ hat man aber anzunehmen:

Rectascensionen:

| Index $i=$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\log h$ | $0_n 00000$ | $9_n 72534$ | $9_n 12507$ | 7·91658 | $7_n 00473$ | $8_n 87574$ | 8·12504 | $7_n 69945$ | 9·37222 | 9·52193 | 9·70665 | 9·72112 |
| $\log n$ | $9_n 48996$ | 9·88447 | $9_n 70003$ | $9_n 36616$ | $9_n 28925$ | $9_n 91891$ | 9·54902 | $9_n 36388$ | 9·62796 | $8_n 38616$ | $8_n 38616$ | 9·87612 |
| $\log s$ | $0_n 30710$ | 9·42526 | 9·25232 | $8_n 99634$ | $9_n 52110$ | $0_n 34464$ | 0·47531 | 9·63340 | 9·85482 | 9·55212 | 0·00144 | 0·48988 |
| $\Sigma$ | +0·28085 | +0·55553 | +0·94131 | +0·13946 | −0·13780 | −1·38830 | +2·63152 | +0·66607 | +0·07823 | +0·08100 | +0·57031 | +1·86851 |
| $g$ | −1·00000 | −0·52442 | −0·12794 | −0·01451 | +0·00149 | +0·08182 | −0·01134 | +0·00001 | −0·02258 | −0·03273 | −0·05157 | −0·05708 |
| $h$ | −1·00000 | −0·53130 | −0·13337 | +0·00825 | −0·00101 | −0·07512 | +0·01334 | −0·00501 | +0·23562 | +0·33261 | +0·50892 | +0·52616 |
| $n$ | −0·30900 | +0·76642 | −0·50122 | −0·23236 | −0·19465 | −0·82968 | +0·35402 | −0·23114 | +0·42458 | −0·02433 | −0·02433 | +0·75183 |
| $s=\Sigma+g+h+n$ | −2·02815 | +0·26623 | +0·17878 | −0.09916 | −0·33197 | −2·21128 | +2·98754 | +0·42993 | +0·71585 | +0·35655 | +1·00333 | +3·08942 |

Declinationen:

| Index $i=$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\log h$ | 9·58935 | 9·46607 | $7_n 62820$ | 8·27218 | 8·43434 | 8·76346 | 8·55526 | 6·94699 | $9_n 35119$ | $9_n 53465$ | $9_n 56380$ | 8·09717 |
| $\log n$ | 9·46715 | $9_n 65916$ | $8_n 83332$ | 9·71657 | 9·54452 | $9_n 69366$ | $9_n 75445$ | $9_n 73055$ | 8·91764 | 9·76456 | 9·93270 | 0·00000 |
| $\log s$ | 0·28870 | $7_n 81425$ | $9_n 77875$ | 0·28648 | 0·18204 | $9_n 21476$ | $9_n 90204$ | $9_n 79093$ | $9_n 89771$ | $0_n 05775$ | $0_n 18028$ | $9_n 17254$ |
| $\Sigma$ | +0.87389 | −0·13145 | −0·52437 | +1·42760 | +1·18310 | +0·33513 | 0·23528 | −0·08110 | −0·66991 | −1·41493 | −2·04183 | −1·15993 |
| $g$ | +0·38846 | +0·28867 | −0·00408 | −0·03290 | −0·03999 | −0·06318 | −0·03055 | ±0·00000 | +0·02151 | +0·03370 | +0·03711 | −0·00136 |
| $h$ | +0·38846 | +0·29246 | −0·00425 | +0·01871 | +0·02719 | +0·05800 | +0·03591 | +0·00089 | −0·22448 | −0·34249 | −0·36627 | +0·01251 |
| $n$ | +0·29319 | −0·45620 | −0·06813 | +0·52068 | +0·35037 | −0·49392 | −0·56814 | −0·53771 | +0·08273 | +0·58151 | +0·85644 | +1·00000 |
| $s=\Sigma+g+h+n$ | +1·94400 | −0·00652 | −0·60083 | +1·93409 | +1·52067 | 0·16397 | −0·79806 | −0·61792 | −0·79015 | −1·14221 | −1·51455 | −0·14878 |

Für die Coëfficienten der Normalgleichungen erhält man weiter:

$[aa] = +4·56261$

$[ab] = -1·36455$ $[bb] = +2·21552$

$[ac] = +0·30033$ $[bc] = +0·01763$ $[cc] = +4·53834$

$[ad] = +2·74787$ $[bd] = -0·63430$ $[cd] = +0·06194$ $[dd] = +3·89375$

$[ae] = -0·02238$ $[be] = +0·16774$ $[ce] = -0·60973$ $[de] = -0·30221$ $[ee] = +4·24816$

$[af] = -0·00124$ $[bf] = +0·22389$ $[cf] = +0·17192$ $[df] = +0·04928$ $[ef] = +0·35477$ $[ff] = +5·29002$

$[ag] = -1·79112$ $[bg] = +1·50796$ $[cg] = +0·14380$ $[dg] = -0·92300$ $[eg] = +0·39841$ $[fg] = -0·25571$

$[ah] = -0·35915$ $[bh] = +2·19267$ $[ch] = +0·21676$ $[dh] = +0·03358$ $[eh] = +0·36975$ $[fh] = +0·04232$

$[an] = +0·43290$ $[bn] = -0·23215$ $[cn] = +1·08749$ $[dn] = -0·43723$ $[en] = +0·22494$ $[fn] = -0·12798$

$[as] = +4·50527$ $[bs] = +4·09441$ $[cs] = +5·92848$ $[ds] = +4·48968$ $[es] = +4·82945$ $[fs] = +5·74727$

$[gg] = +1·55075$

$[gh] = +1·41568$ $[hh] = +2·55219$

$[gn] = 0·09637$ $[hn] = -0·05818$ $[nn] = +6·26678$

$[gs] = +1·95040$ $[hs] = +6·40562$ $[ns] = +7·06020$

Die Auflösung der Normalgleichungen ergibt endlich für die Unbekannten die Werthe:

$\log x_1 = 8·833\,935$

$\log x_2 = 9_n 883\,035$

$\log x_3 = 9·339\,351$

$\log x_4 = 9_n 476\,909$

$\log x_5 = 8·618\,915$

$\log x_6 = 7_n 770\,759$

$\log x_7 = 8_n 591\,272$

$\log x_8 = 9·809\,024$

denen folgende Correctionen der ekliptikalen Elemente entsprechen:

$$\begin{aligned} \partial M_0 &= +0\overset{''}{.}06 \\ \partial \pi &= -1\cdot 53 \\ \partial \Omega &= +0\cdot 32 \\ \partial i &= +0\cdot 14 \\ \partial \varphi &= +0\cdot 35 \\ \partial \mu_0 &= -0\overset{''}{.}000\,1060 \end{aligned}$$

Die Verbesserungen der Massen ergeben sich zu:

$$\frac{m}{n} = -0\cdot 0000\,0045\,4 \pm 0\cdot 0000\,1999\,0$$

$$\frac{m_1}{n_1} = +0\cdot 0383\,331 \pm 0\cdot 1679\,300$$

oder

Masse des Planeten Jupiter $= 1 : 1047\cdot 1758 \pm 0\cdot 0210$

„ „ „ Mercur $= 1 : 501\,2842 \pm 69\,7863$

Die erstere Masse hat sich also nur um 0·0006 Einheiten des Nenners geändert. Dieser Umstand scheint mir neuerdings dafür zu sprechen, dass unserer Bestimmung der Masse des Planeten Jupiter ein ganz besonderes Gewicht beigelegt werden müsse.

Für die Masse des Planeten Mercur ergibt sich aber der wahrscheinliche Fehler grösser wie die Verbesserung selbst. Dieselbe scheint mir daher von sehr problematischem Werth.

Die Summe der Fehlerquadrate $[vv] = +386\overset{''}{.}14$ ist nicht viel kleiner wie die Ausgangssumme, daher stellt sich auch die Darstellung nur wenig besser. Der directe Vergleich der Rechnung mit der Beobachtung ergab:

| | | | Beob.—Rechn. | |
|---|---|---|---|---|
| | | | $\Delta AR \cos D$ | $\Delta D$ |
| 1858 | März | 17 | −2″96 | −1″16 |
| | April | 12 | +4·92 | −4·48 |
| | Juni | 12 | −4.31 | −0·53 |
| 1869 | Mai | 1 | +1·25 | +3·61 |
| | Mai | 12 | +1·30 | +2·24 |
| | Juni | 7 | −3·49 | −5·01 |
| | Sept. | 7 | +3·09 | −5·15 |
| 1875 | Febr. | 10 | −1·27 | −4·72 |
| 1886 | Aug. | 25 | +4·27 | +0·23 |
| | Sept. | 14 | +0·25 | +4·60 |
| | Oct. | 4 | −0·16 | +7·17 |
| | Nov. | 13 | +5·91 | +8·28 |

und für den mittleren Fehler einer Bedingungsgleichung fand ich endlich:

$$\varepsilon = \pm 4\overset{''}{.}913.$$

# Zweiter Theil.

## Über die Masse des Planeten Mercur.

### Einleitung.

Man entbehrte bei dem bisherigen Stand der Untersuchungen über die Masse des Planeten Mercur jedes Anhaltspunktes zur Entscheidung, welcher von den drei direct bestimmten Werthen — jener von Asten, Backlund oder Le Verrier den Vorzug verdiene, ja es scheint mir sogar, dass sich kaum die Behauptung hätte rechtfertigen lassen, dass wir für die Mercursmasse bis heute zu einem auch nur der Hauptsache nach verbürgten Werth gelangt seien, denn die einzelnen Bestimmungen hatten auf fast völlig verschiedene Werthe geführt.

Wenn nun die Störungen, welche der Komet Winnecke durch den Planeten Mercur erfährt, selbst wieder so gering sind, dass der Werth, den wir im vorhergehenden Capitel für diese Masse gefunden haben, sehr unsicher genannt werden muss und sich die Störungen, wenigstens vorderhand, noch nicht zu einer selbstständigen Bestimmung eignen, zu einem können sie doch mit Erfolg herangezogen werden, zur Aufstellung eines Kriteriums, innerhalb welcher engeren Grenzen der wahre Werth der Mercursmasse nur liegen könne, und weiter, welcher von den drei Werthen: Asten, Backlund oder Le Verrier dem wahren Werth am nächsten komme.

Im Anschluss an die Auseinandersetzungen hiefür gebe ich noch einige weitere Untersuchungen, die, wie wir sehen werden, uns in Stand setzen, die Masse des Planeten Mercur sogar näher zu präcisiren.

## I. Capitel.

### Ein Kriterium für die Masse des Planeten Mercur.

Dass die Le Verrier'sche Mercursmasse $(☿)_L = 1 \cdot 531\,0000$ in besten Einklang zu bringen ist mit einer guten Darstellung der Beobachtungen des Kometen Winnecke, folgt unmittelbar aus den Resultaten der vorhergehenden Capitel, denn wegen der geringen Grösse der Störungen ändert sich die Darstellung nur höchst unbedeutend, wenn wir statt: $(☿) = 1 : 520\,5000$ den Werth $(☿)_L = 1 : 531\,0000$ einführen. Für diese Werthe finden sich auch die kleinen, in $M$ auftretenden Differenzen schon oben (S. 157) angesetzt. Wir können aber aus dem wahrscheinlichen Fehler unserer directen Bestimmung weiter schliessen, dass wir mit jeder Mercursmasse, welche die Grenzen $1 : 430\,0000$ und $1 : 570\,0000$ nicht überschreitet, wenn wir nur die sechs Elemente wie die Jupitersmasse dementsprechend abändern, stets zu einer nahe gleich guten Darstellung kommen müssen.

Erweitern sich aber nicht die Grenzen sehr — etwa einerseits bis zum Backlund'schen, anderseits bis zum Asten'schen Werth — wenn man ferner noch kleinere Correctionen der Massen der übrigen störenden Planeten in Betracht zieht und eventuell auch die nicht auszuschliessende Unsicherheit der Störungswerthe selbst? Gewiss etwas, aber ich will im Folgenden zeigen, dass man, mit Zugrundelegung des Werthes Backlund's oder Asten's für die Mercursmasse, selbst mit gleichzeitiger Berücksichtigung aller dieser Correctionen, das Ziel nicht erreichen kann, nämlich allen Beobachtungen des periodischen Kometen Winnecke zu genügen.

An die Schlusselemente des ersten Theils (S. 83), und zwar in der mittleren Anomalie, sind, wie wir schon oben bemerkt haben, wenn man auf die neuen Massen für Venus, Erde und Mars übergehen will, die folgenden Correctionen $(\omega)$ anzubringen, welche in der dritten Horizontalzeile wiedergegeben sind. In die zweite Zeile setze ich die Mercursstörungen in $M$ unter Annahme des Werthes für diese Masse: $(☿)_B = 1 : 239\,3300$ (Backlund), endlich in die vierte dieselben Störungen, aber mit der Masse: $(☿)^A = 1 : 763\,6440$

(Asten) berechnet. Da diese ebenfalls noch den bezeichneten Elementen zuzulegen sind, so hat man beziehungsweise die Summe der zweiten und dritten, oder dritten und vierten Zeile zeichengemäss an $M$ zu fügen, je nachdem $(☿)_H$ oder $(☿)_A$ eingeführt werden soll.

| Datum | 1858 März 17 | 1858 April 12 | 1858 Juni 12 | 1869 Mai 1 | 1869 Mai 12 | 1869 Juni 7 | 1869 Sept. 7 | 1875 Febr. 10 | 1886 Aug. 25 | 1886 Sept. 14 | 1886 Oct. 4 | 1886 Nov. 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I = \Delta M\,(☿)_H$ | −31"26 | −31"45 | −31"83 | +1"81 | +2"12 | +2"69 | +2"70 | −0"30 | +30"30 | +30"41 | +30"34 | +29"85 |
| $\omega$ | +3·16 | +2·94 | +2·00 | −4·83 | −4·85 | −4·97 | −5·28 | −0·04 | −6·29 | −6·31 | −6·34 | −6·31 |
| $II = \Delta M\,(☿)_A$ | −9·80 | −9·86 | −9·98 | +0·57 | +0·66 | +0·81 | +0·86 | −0·09 | +9·51 | +9·53 | +9·51 | +9·36 |
| $\Delta m_1 = I + \omega$ | −28"10 | −28"51 | −29"23 | −3"02 | −2"73 | −2"28 | −2"52 | −0"34 | +24"07 | +24"10 | +24"00 | +23"54 |
| $\Delta m_2 = II + \omega$ | −6"64 | −6"92 | −7"38 | −4"20 | −4"19 | −4"13 | −4"42 | −0"13 | +3"22 | +3"22 | +3"17 | +3"05 |

Schon ein roher Versuch zeigt, dass sich hier die $\Delta m_1$ oder $\Delta m_2$ nicht mehr auf so einfache Weise, wie früher für die Le Verrier'sche Masse, also blos durch eine geringe Verkleinerung der mittleren Bewegung, wegschaffen lassen, denn wenn auch die grössten Beträge an den Enden (1858 und 1886) hiedurch herabgemindert werden können, es wachsen hiefür wieder die Fehler im Jahre 1869 stark an oder bleiben doch gross.

Damit aber die Untersuchung in aller Strenge durchgeführt werden konnte, war es nöthig, die übrigbleibenden Fehler in den geocentrischen Orten zu kennen. Ich habe daher sechsstellig die Normalorte direct dargestellt und durch den Vergleich der Rechnung mit der Beobachtung folgende Differenzen erhalten:

| | | | I. Mit der Mercursmasse $m_1 = 1:239\,3300$ | | II. Mit der Mercursmasse $m_2 = 1:763\,0440$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $\Delta AR \cos D$ | $\Delta D$ | $\Delta AR \cos D$ | $\Delta D$ |
| 1858 | März | 17 | +4' 30"1 | −1' 44"9 | +1' 3"8 | −24"8 |
| | April | 12 | +2 24·7 | −1 19·7 | + 35·1 | −19·3 |
| | Juni | 12 | +36·8 | +1·2 | +9·3 | +0·3 |
| 1869 | Mai | 1 | +4·1 | +9·4 | +5·8 | +13·3 |
| | Mai | 12 | −0·4 | +10·6 | −0·6 | +16·2 |
| | Juni | 7 | −19·1 | +14·7 | −34·6 | +26·7 |
| | Sept. | 7 | +3·7 | +9·8 | +6·4 | +17·3 |
| 1875 | Febr. | 10 | +1·7 | −0·3 | +0·6 | 0·1 |
| 1886 | Aug. | 25 | −56·1 | +53·5 | −7·5 | +7·2 |
| | Sept. | 14 | −1' 19·2 | +1' 21·0 | −10·6 | +10·9 |
| | Oct. | 4 | −2 0·9 | +1 27·0 | −16·0 | +11·5 |
| | Nov. | 13 | −2 4·6 | 3·0 | −16·1 | −0.4 |

Nachdem ferner die Coefficienten zur Verbesserung der Massen von Venus, Erde und Mars nachgetragen worden waren, ging ich an die Auflösung der Bedingungsgleichungen, und zwar das erstemal mit Zugrundelegung der links, das zweitemal der rechts, angesetzten Differenzen: $\Delta AR \cos D$ und $\Delta D$.

Da die Verbesserungen der sechs Elemente, wie der Massen von Jupiter, Mars, Erde und Venus in Betracht zu ziehen waren, erhöhte sich die Zahl der Unbekannten auf zehn. Aus denselben Gründen, die ich schon früher dargelegt habe, konnte auch hier von einer Correction der Saturns- und Uranusmasse ganz abgesehen werden.

Der Umstand, dass bei Auflösung I die Summe der restirenden Fehlerquadrate (2200") übermässig gross bleibt, erlaubt uns sofort zu schliessen, dass Backlund's Werth zu gross sei. Bei Auflösung II sinkt die Summe der Fehlerquadrate wohl auf 500" herab. Aus einem gewichtigen Grunde muss aber die Enddarstellung trotzdem als sehr unbefriedigend bezeichnet werden. Es bleibt nämlich just im Normalort: „1875 Febr. 10"

ein ungewöhnlich grosser Fehler von $12''$ übrig, während die Fehler aller übrigen Orte einige Secunden nicht übersteigen.

Durch einen Blick auf die Beobachtungen, die diesem Normalort zu Grunde liegen, überzeugt man sich aber leicht, da die Übereinstimmung der einzelnen Messungen eine sehr gute ist, dass es nicht zulässig erscheint, die Unsicherheit dieses Normalortes wegen der Beobachtungsfehler grösser als zu $2''$ in $AR$ anzunehmen. Eine Unsicherheit der Störungswerthe kann hier aber auch nicht herangezogen werden, denn wegen der unmittelbaren Nähe der Osculationsepoche sind die Störungen selbst nahe 0.

Es kömmt aber ferner noch hinzu, dass aus dieser Auflösung für die Massen des Mars (1 : 204 0000) ein Werth resultirt, welcher völlig in Widerspruch steht mit allen neueren und sicheren Bestimmungen.

Wir sind demnach zu schliessen gezwungen, dass man weder mit dem Werthe Asten's noch mit dem Backlund's für die Masse des Planeten Mercur, wenn man selbst grössere Correctionen der Massen von Venus, Erde, Mars und Jupiter noch zulässt und auch eine etwaige Unsicherheit der Störungswerthe nicht ausschliesst, zu einer befriedigenden Darstellung sämmtlicher Beobachtungen unseres Kometen gelangen kann.

Der wahre Werth für die Masse des Planeten Mercur muss also ungefähr in der Mitte derselben oder in der Nähe des Le Verrier'schen Werthes liegen.

## II. Capitel.

### Bemerkungen zu Le Verrier's Massenbestimmung.

Ich erlaube mir hier die nachfolgenden Stellen aus den Untersuchungen Le Verrier's (Annales de l'observatoire impérial de Paris, Memoires, Tome VI, Paris 1861, p. 91) vollinhaltlich zu wiederholen, nicht nur weil sie zum Verständniss meiner anschliessenden Bemerkungen erforderlich sind, sondern selbst schon in so knapper und klarer Weise alles zum Folgenden Nöthige zusammengefasst enthalten, dass ein Auszug hieraus kaum auf geringeren Raum beschränkt werden könnte. Le Verrier sagt:

„Nous sommes donc réduits, si nous voulons en tenir aux conditions qui paraissent jouir d'une notable précision, aux relations suivantes:

1. Celle qu'on déduit de la variation de l'obliquité de l'ecliptique;
2. Celle que nous avons tirée de la considération des latitudes de Vénus;
3. Enfin les trois conditions que nous avons obtenues par la discussion des longitudes, mais qui sont toutes trois relatives à la détermination de la masse de Mercure. Nous ne les distinguons que pour mieux apprécier le degré d'exactitude auxquelles elles pourront conduire.

En rapprochant les diverses relations, nous aurons, pour déterminer les trois inconnues $\nu$, $\nu'$, $\nu''$ et par suite, les masses des trois planètes Mercure, Vénus et la Terre, les trois relations:

| | | |
|---|---|---|
| $+\ 0''53\nu+28''88\nu'+\ 1''72=0$ | (Par l'obliquité de l'ecliptique) | $M$ |
| $-\ 0\cdot88\nu+32\cdot5\ \nu'+43\cdot4\nu''-\ 2''6=0$ | (Par latitudes de Vénus) | |
| $+27.4\ \nu+46\cdot3\ \nu'+51\cdot6\nu''+18\cdot6=0$ | (1639) | |
| $+14\cdot3\ \nu+25\ 5\ \nu'+27\cdot7\nu''+\ 1\cdot7=0$ | (Par les longitudes de Vénus) (1751—1761) | |
| $+\ 7\cdot8\ \nu+\ 9\cdot2\ \nu'+15\cdot3\nu''+\ 3\cdot7=0$ | (1766—1830) | |

Parmi les conditions que nous venons d'ecrire, la première est propre à déterminer $\nu'$, et par suite la masse de Vénus. L'ensemble des trois dernières peut faire connaître $\nu$, d'où l'on tirera la masse de Mercure. La seconde relation devra donc donner $\nu''$, et par suite la masse de la Terre. Cette relation, déduite de la considération des latitudes de Vénus, est très-precise; et il ne paraît pas que la partie constante $2''6$, déterminée par les observations des passages sur le Soleil en 1761 et 1769, et par les observations méridiennes de

Bradley, puisse comporter une erreur supérieur à un ou deux dixièmes de seconde d'arc. Et comme on en tire

$$\nu''+0{\cdot}749\nu' = 0{\cdot}0599+0{\cdot}0203\nu$$

on doit considérer que la partie numérique $0{\cdot}0599$ de la fonction $\nu''+0{\cdot}749\nu'$ est exacte à $^1/_{200}$ de l'unité. Ainsi cette fonction est parfaitement connue, et c'est sans doute la notion la plus précise qu'on possède pour la détermination des masses des planètes inférieurs à Mars.

En s'en servant pour éliminer $\nu''$ des trois dernières relations $(M)$, elles diviendron:

$$28{\cdot}4\nu+7{\cdot}7\nu'+21{\cdot}1=0 \qquad (1639)\ldots\ldots N$$
$$14{\cdot}9\nu+4{\cdot}7\nu'+\ 3{\cdot}4=0 \qquad (1751-1761)\ldots P$$
$$8{\cdot}1\nu-2{\cdot}3\nu'+\ 4{\cdot}6=0 \qquad (1766-1830)\ldots Q.$$

Les derniers termes de ces trois nouvelles relations conservent la même exactitude que ceux des relations primitives, à cause de la précision de la formule par laquelle on a éliminé l'indéterminée $\nu''$.

Le dernier terme de $(N)$ peut, avons nous dit, être en erreur de 6 à 7 secondes, ce qui correspond à une incertitude d'un demi-millimètre dans les mesures prises par Horroxius sur une image solaire de six pouces de diamètre.

Le dernier terme de $(P)$ ne doit comporter d'autre erreur que celle qui proviendrait de ce que Bradley n'aurait point observé le centre de Vénus de le même manière avant et après la conjonction inférieure: chose très-possible, puisque nous avons vu qu'incontestablement l'observation du centre de Vénus avait été sujette à une incertitude systématique très-notable.

Le dernier terme de $(Q)$ semble devoir être plus exact, son erreur provenant surtout de l'incertitude des observations des bords de la planète. Mais, d'un autre côté, le coefficient de l'inconnue $\nu$ est plus petit dans cette équation que dans la précédente.

Par suite de ces considérations, il semble que, pour former l'équation définitive propre à donner la valeur de $\nu$, il convient de diviser par 4 tous les termes de l'équation $(N)$ et d'ajouter l'équation ainsi obtenue aux équations $(P)$ et $(Q)$. On trouve par là,

$$30{\cdot}1\nu+4{\cdot}3\nu'+13{\cdot}3 = 0.$$

Cette relation, jointe aux deux premières relations $(M)$ fournit les valeurs:

$$\nu = -0{\cdot}435,\ \nu' = -0{\cdot}052,\ \nu'' = +0{\cdot}090.$$

Nous avons adopté jusqu'ici pour base de nos calculs la masse de Mercure:

$$m = 1:300\,0000.$$

Cette masse était trop forte; d'aprés la valeur obtenue: $\nu = -0{\cdot}435$ on aurait

$$m = 1:531\,0000.$$

Non seulement l'équation finale, tirée des équations particulières $(N)$ $(P)$ et $(Q)$ exige la diminution de la masse de Mercure, mais il en est de même de chacun de ces équations en particulier.

Le résultat joint sans doute de la même précision absolue que les déterminations des valeurs des autres masses. Mais, en raison de la petitesse de la masse de Mercure, l'éxactitude relative est nécessairement moindre. Nous n'oserions pas dire que cette masse ainsi déterminée fût mieux connue qu'au cinquième près de ca valeur. C'est cependant une conclusion important d'avoir pu tirer de la théorie des mouvements planétaires une valeur même approximative de la masse de Mercure."

Zu dem Vorangehenden scheint mir nur noch nöthig die Bemerkung nachzutragen, dass für Venus und Erde als Ausgangswerthe der Massen, also als Werthe, an welche die Verbesserungen ($\nu'$ und $\nu''$) anzubringen seien, von Le Verrier angenommen worden waren:

$$m' = \text{Masse der Venus} = 0\cdot000\,002\,4885\,(1+\nu') = 1:401\,848$$
$$m'' = \text{Masse (Erde+Mond)} = 0\cdot000\,002\,8174\,(1+\nu'') = 1:354\,937$$

Wir wollen nun auf dieselben fünf Gleichungen ($M$), aus denen Le Verrier gleichzeitig die drei Massencorrectionen für Mercur, Venus und Erde abgeleitet hat zurückgreifen, doch uns im Folgenden lediglich auf die Bestimmung der Masse des Mercur beschränken.

Ich habe schon oben erwähnt, dass Bauschinger für die Masse der Venus als wahrscheinlichsten Werth (♀) = 1 : 411 700 angibt und auch die Gründe dargelegt, warum mir der Werth (♁ + ☾) = 1 : 322 883 die beste Annahme zu sein scheine, welche man heute für die Erdmasse zu machen im Stande sei.

Führt man diese Werthe in die ($M$) Gleichungen ein, setzt man also:

$$\nu' = -0\cdot0239$$
$$\nu'' = +0\cdot0993$$

so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$+\;0\text{"}53\nu = -\;1\text{"}03 \pm 1\text{"}5 \qquad \text{(I)}$$
$$+\;0\cdot88\nu = +\;0\cdot9\;\pm 0\cdot2 \qquad \text{(II)}$$
$$+27\cdot4\;\nu = -22\cdot6\;\pm 6\cdot5 \qquad \text{(III)}$$
$$+14\cdot3\;\nu = -\;2\cdot8\;\pm 2\cdot(?) \qquad \text{(IV)}$$
$$+\;7\cdot8\;\nu = -\;5\cdot0\;\pm 1\cdot(?) \qquad \text{(V)}$$

Neben den Constanten wurden — Le Verrier's Bemerkungen entsprechend — gleich die Beträge angesetzt, innerhalb welcher die Constanten in Folge der Unsicherheit der Beobachtungen fehlerhaft sein können.

Aus diesen Gleichungen folgt der Reihe nach für $\nu$:

$$\nu_1 = -1\cdot943\;\pm 2\cdot830$$
$$\nu_2 = +1\cdot023\;\pm 2\cdot273$$
$$\nu_3 = -0\cdot825\;\pm 0\cdot237$$
$$\nu_4 = -0\cdot2657 \pm 0\cdot14(?)$$
$$\nu_5 = -0\cdot6410 \pm 0\cdot13(?)$$

Wohl ergeben die Gleichungen (I) und (II) wegen der geringen Grösse der Coëfficienten, $\nu$ wesentlich unsicherer wie die Gleichungen (IV) und (V). Fasst man aber je zwei mit gleicher Unsicherheit behaftete Werthe ($\nu_1$ und $\nu_2$ einerseits, $\nu_4$ und $\nu_5$ andererseits) zusammen, so erhält man aus diesen zwei Gruppen fast denselben Werth für die Verbesserung der Mercursmasse, nämlich:

$$\frac{(\nu_1+\nu_2)}{2} = -0\cdot460, \qquad \frac{(\nu_4+\nu_5)}{2} = -0\cdot453.$$

Mit Rücksicht auf diese Übereinstimmung — da die dritte Decimalstelle selbst fraglich ist, kann man sie als vollkommen betrachten — bleibt es aber fast völlig gleichgiltig, ob man alle vier Gleichungen (I), (II), (IV) und (V) in gleicher Weise heranzieht, oder ob man sich nur auf die zwei letzten sichereren beschränkt, oder ob man endlich bei der Zusammenfassung von irgend welcher Annahme über die Gewichte ausgeht. In einfachster Weise ergibt sich jedenfalls:

$$\nu = (\nu_1+\nu_2+\nu_4+\nu_5):4 = -0\cdot456$$

welchen Werth wir beibehalten wollen.

Bei Gleichung (III) (Horroxius 1639) hat schon Le Verrier die besondere Unsicherheit hervorgehoben und sie schliesslich auch nur mit dem Gewichte $^1/_4$ participiren lassen. Ich ziehe es aber vor, von derselben gar keinen Gebrauch zu machen, denn dem Werthe: $\nu_3 = -0\cdot825$ entspricht der Werth der Mercursmasse 1 : 1712 0000 und haben wir im vorhergehenden Capitel schon dargelegt, dass eine solche Verkleinerung der Mercursmasse nicht zulässig sei. Die Unsicherheit der Beobachtungen von Horroxius scheint jedenfalls grösser zu sein, als Le Verrier annehmen zu können geglaubt hat.

Der obige Werth: $\nu = -0\cdot456$ führt auf die Mercursmasse:

$$(☿) = \frac{1}{551\,4700}$$

Nach dem Vorausgehenden bedarf es wohl keiner weiteren Begründung, dass sowohl der eben gegebene Werth der Mercursmasse, wie jener Le Verrier's: 1 : 531 0000 abhängig sei von den Annahmen über die Massen der Planeten Venus und Erde. Da nun jene Werthe, die wir hiefür adoptirt haben, den Vorzug vor den Le Verrier'schen, gleichzeitig aus den $(M)$ Gleichungen bestimmten, verdienen, und mir auch die Art wie hier die Einzelwerthe zusammengefasst wurden, möglichst frei von Willkür scheint, glaube ich zu dem Schlusse berechtigt zu sein, dass unser Werth für die Mercursmasse dem Le Verrier's vorzuziehen ist.

Wir werden im folgenden Capitel sehen, dass dieser Schluss von anderer Seite eine überraschende Bestätigung erfährt.

## III. Capitel.

### Über die Werthe, welche die Bearbeitung des Kometen Encke durch Asten und Backlund für die Mercursmasse ergeben hat.

In seiner Abhandlung „Komet Encke 1865—1885" macht schon Backlund auf die Schwierigkeit aufmerksam, „die Bestimmung der Mercursmasse von der Bestimmung von $\mu'$, der Acceleration, zu trennen", und findet sich unter anderem (S. 37 daselbst) die folgende Stelle:

„Zur Beleuchtung dieses Punktes mögen noch die denselben Systemen zugehörigen Werthe von $m$ (☿) und $\mu'$ zusammengestellt werden:

| $m$ (☿) | $\mu'$ |
|---|---|
| $\frac{1}{327\,1742}$ | $+0\cdot097\,774$ |
| $\frac{1}{1025\,2900}$ | $+0\cdot105\,544$ |
| $\frac{1}{823\,4192}$ | $+0\cdot104\,730$ |
| $\frac{1}{763\,6440}$ | $+0\cdot104\,418$ |
| Nach 1870 (Erscheinungen 1871—1885) | |
| $\frac{1}{763\,6440}$ | $+0\cdot060\,913$ |
| $\frac{1}{266\,8700}$ | $+0\cdot053\,121$ |

Es scheint also, als ob den grösseren Werthen von $m$ kleinere Werthe von $\mu'$ und den kleineren Werthen von $m$ die grösseren von $\mu'$ entsprächen."

Diese Bemerkung hat mich zu den folgenden Untersuchungen angeregt und ich hebe dieses ausdrücklich hervor, einerseits zum Beweise dessen, dass mir nur die Ausführung, welche ich hier folgen lasse, nicht der

zu Grunde liegende Gedanke selbst ein neuer zu sein scheint,[1] andererseits um der Ansicht vorzubeugen, ich beabsichtige etwa hier gegen die Untersuchungen **Asten**'s und **Backlund**'s irgend welche Ausstellungen zu machen. Im Gegentheil, ich zolle diesen Untersuchungen aufrichtige Bewunderung und stehe nicht an zu erklären, dass sie mir als Muster vorgeschwebt haben.

Wir wollen annehmen, es liege in der That der Grund dafür, dass die Bestimmung der Masse des Planeten Mercur aus den auf den **Encke**'schen Kometen ausgeübten Störungen zu so widersprechenden Werthen geführt habe einzig oder hauptsächlich darin, dass mit der Acceleration stets auch gleichzeitig die Masse dieses Planeten bestimmt wurde. Diese Annahme lässt aber offenbar eine Prüfung zu, denn man verzichte einstweilen nur auf eine nochmalige Verbesserung der Acceleration. Berechnet man zu diesen Zweck erst mit dem letzterhaltenen Werthe von $\mu'$ empyrische Correctionen, und bringt dieselben an die Elemente an, so wird eine erneute Auflösung der Bedingungsgleichungen, welche zwischen den sechs Elemente und der Mercursmasse einerseits und den restirenden Fehlern andererseits bestehen, uns nun zu einem Werth für diese Masse führen müssen, welcher sich umsoweniger von dem wahren Werth der Mercursmasse wird unterscheiden können, je näher der zu Grund gelegte Werth von $\mu'$ dem wahren kömmt. Hierauf wird man wieder (☿) constant beibehalten und nun an die Ermittlung von $\mu'$ gehen. Setzen wir den Fall, $\mu'$ sei schon als gute Näherung anzusehen, so wird bei doppelter Anwendung dieses Näherungsverfahrens, auf den von **Asten** näher untersuchten Zeitraum (1819—1868), wie auf die Erscheinungen (1871—1885), welche **Backlund** bearbeitete, für die Masse des Mercur aus beiden Zeiträumen nur ein nahe gleicher Werth resultiren können, da in beiden Fällen der angenommenen Fehlerquelle, der Unsicherheit wegen der gleichzeitigen Bestimmung von $\mu'$, nun in derselben Weise vorgebeugt ist.

Es gilt aber auch die Umkehrung. Mit anderen Worten: Wenn die Rechnung zeigt, dass bei einer successiven Bestimmung von (☿) und $\mu'$ nur ein einziger oder nahe gleiche Werthe für (☿) resultiren, ist es als bewiesen anzusehen, dass der Grund, warum die Bestimmung dieser Masse aus den Beobachtungen des **Encke**'schen Kometen zu so verschiedenen Werthen geführt habe, einzig oder hauptsächlich der war, dass man bei der Bearbeitung dieses Kometen gleichzeitig die Acceleration der mittleren Bewegung wie die Masse des Planeten Mercur zu bestimmen versuchte.

Dass der so definirten Schwierigkeit in der That die Hauptschuld beizumessen sei, dieses scheinen mir die folgenden Ausführungen evident zu beweisen. Ob aber der einzige Grund — dafür werden wir nur eine grosse Wahrscheinlichkeit geltend machen können.

Für den von **Asten** untersuchten Zeitraum 1819—1868 musste ich mich mit einer genäherten Rechnung begnügen, da die von **Backlund** in Aussicht gestellte Revision der **Asten**'schen Rechnung noch nicht abgeschlossen ist.

Auf S. 17 seiner „Untersuchungen über die Theorie des **Encke**'schen Kometen II" [2] gibt **Asten** folgende Gleichungen zwischen den wegzuschaffenden Fehlern in $M$, der Correction der mittleren Anomalie ($\Delta M_0$ Epoche 1865), der mittleren Bewegung ($\Delta\mu$), der Acceleration ($\Delta\mu'$), endlich den Verbesserungen der drei Massen Mercur, Erde und Jupiter (Δ☿, Δ♁, Δ♃):

| | |
|---|---|
| 1819 | $0 = -75{\cdot}1 + \Delta M_0 - 14(\Delta\mu) + 105(\Delta\mu') + 122{\cdot}20\Delta$☿ $+ 0{\cdot}20\Delta$♁ $+ 14{\cdot}66\Delta$♃ |
| 1822 | $0 = -66{\cdot}2 + \Delta M_0 - 13(\Delta\mu) + 91(\Delta\mu') + 105{\cdot}51\Delta$☿ $- 0{\cdot}89\Delta$♁ $+ 10{\cdot}25\Delta$♃ |
| 1825 | $0 = -54{\cdot}7 + \Delta M_0 - 12(\Delta\mu) + 78(\Delta\mu') + 89{\cdot}66\Delta$☿ $- 2{\cdot}28\Delta$♁ $+ 7{\cdot}21\Delta$♃ |
| 1829 | $0 = -39{\cdot}0 + \Delta M_0 - 11(\Delta\mu) + 66(\Delta\mu') + 73{\cdot}37\Delta$☿ $- 4{\cdot}38\Delta$♁ $+ 3{\cdot}88\Delta$♃ |
| 1832 | $0 = -17{\cdot}2 + \Delta M_0 - 10(\Delta\mu) + 55(\Delta\mu') + 57{\cdot}68\Delta$☿ $- 19{\cdot}40\Delta$♁ $+ 1{\cdot}76\Delta$♃ |
| 1835 | $0 = -16{\cdot}0 + \Delta M_0 - 9(\Delta\mu) + 45(\Delta\mu') + 41{\cdot}64\Delta$☿ $- 23{\cdot}03\Delta$♁ $+ 0{\cdot}43\Delta$♃ |
| 1838 | $0 = -4{\cdot}4 + \Delta M_0 - 8(\Delta\mu) + 36(\Delta\mu') + 29{\cdot}84\Delta$☿ $- 24{\cdot}71\Delta$♁ $- 2{\cdot}43\Delta$♃ |

[1] Hiebei ist allerdings die Voraussetzung gemacht, dass meine Auffassung der obigen Bemerkung **Backlund**'s richtig sei. Näheres hierüber erhellt aus den folgenden Sätzen.

[2] St. Petersburg 1878. Mémoires de l'académie impériale des sciences. Tome XXVI, Nr. 2.

| | |
|---|---|
| 1842 | $0 = +10{\cdot}9 + \Delta M_0 - 7(\Delta\mu) + 28(\Delta\mu') + 17{\cdot}35\Delta$☿ $- 35{\cdot}53\Delta$♁ $- 4{\cdot}71\Delta$♃ |
| 1845 | $0 = +\ 3{\cdot}6 + \Delta M_0 - 6(\Delta\mu) + 21(\Delta\mu') + 4{\cdot}97\Delta$☿ $- 36{\cdot}11\Delta$♁ $- 13{\cdot}13\Delta$♃ |
| 1848 | $0 = -15{\cdot}6 + \Delta M_0 - 5(\Delta\mu) + 15(\Delta\mu') - 7{\cdot}25\Delta$☿ $- 35{\cdot}97\Delta$♁ $- 9{\cdot}73\Delta$♃ |
| 1852 | $0 = +\ 1{\cdot}7 + \Delta M_0 - 4(\Delta\mu) + 10(\Delta\mu') - 4{\cdot}68\Delta$☿ $- 31{\cdot}52\Delta$♁ $- 6{\cdot}45\Delta$♃ |
| 1855 | $0 = +23{\cdot}4 + \Delta M_0 - 3(\Delta\mu) + 6(\Delta\mu') - 2{\cdot}76\Delta$☿ $- 21{\cdot}58\Delta$♁ $- 2{\cdot}19\Delta$♃ |
| 1858 | $0 = +17{\cdot}8 + \Delta M_0 - 2(\Delta\mu) + 3(\Delta\mu') - 0{\cdot}10\Delta$☿ $- 8{\cdot}43\Delta$♁ $- 0{\cdot}48\Delta$♃ |
| 1862 | $0 = +\ 3{\cdot}3 + \Delta M_0 - 1(\Delta\mu) + 1(\Delta\mu') + 0{\cdot}24\Delta$☿ $- 1{\cdot}29\Delta$♁ $- 0{\cdot}24\Delta$♃ |
| 1865 | $0 = \quad 0{\cdot}0 + \Delta M_0$ |
| 1868 | $0 = +\ 3{\cdot}9 + \Delta M_0 + 1(\Delta\mu) + 0(\Delta\mu') + 0{\cdot}00\Delta$☿ $- 3{\cdot}31\Delta$♁ $+ 1{\cdot}07\Delta$♃ |

Für die Massen, deren Verbesserung gesucht wurde, hatte Asten beziehungsweise angenommen:

Masse Mercur = 1 : 550 0000
„ (Erde + Mond) = 1 : 355 499
„ Jupiter = 1 : 1047.879

Wir wollen hier ganz von einer Neubestimmung der zwei letzten Werthe absehen. Die hiezu gegebenen Coëfficienten sollen aber dazu verwerthet werden, um statt der obigen die neueren und jedenfalls zuverlässigeren Werthe:

Masse (Erde + Mond) = 1 : 322 883
„ Jupiter = 1 : 1047.1752

einzuführen. Eine kurze Rechnung zeigt, weil von Asten gesetzt worden war:

$$10\,\frac{\Delta m_0}{m_0} = \Delta\text{☿}$$

$$10\,\frac{\Delta m_2}{m_2} = \Delta\text{♁}$$

$$1000\,\frac{\Delta m_4}{m_4} = \Delta\text{♃}$$

dass man in obige Gleichungen zu substituiren habe:

für Δ♁ den Werth: Δ♁ = +1·0101
„ Δ♃ hingegen: Δ♃ = +0·673

Fasst man nun die Constanten zeichengemäss zusammen und lässt ferner gleich jene Verticalzeile weg, welche die Coefficienten zur Bestimmung von $\mu'$, der Acceleration, enthält, so ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

| | |
|---|---|
| 1819 | $\Delta M_0 - 14(\Delta\mu) + 122{\cdot}20\Delta$☿ $= +65{\cdot}0$ |
| 1822 | $\Delta M_0 - 13(\Delta\mu) + 105{\cdot}51\Delta$☿ $= +60{\cdot}2$ |
| 1825 | $\Delta M_0 - 12(\Delta\mu) + 89{\cdot}66\Delta$☿ $= +52{\cdot}1$ |
| 1829 | $\Delta M_5 - 11(\Delta\mu) + 73{\cdot}37\Delta$☿ $= +40{\cdot}8$ |
| 1832 | $\Delta M_0 - 10(\Delta\mu) + 57{\cdot}68\Delta$☿ $= +35{\cdot}6$ |
| 1835 | $\Delta M_0 - 9(\Delta\mu) + 41{\cdot}64\Delta$☿ $= +39{\cdot}0$ |
| 1838 | $\Delta M_0 - 8(\Delta\mu) + 29{\cdot}84\Delta$☿ $= +31{\cdot}0$ |
| 1842 | $\Delta M_0 - 7(\Delta\mu) + 17{\cdot}35\Delta$☿ $= +28{\cdot}2$ |
| 1845 | $\Delta M_0 - 6(\Delta\mu) + 4{\cdot}97\Delta$☿ $= +41{\cdot}7$ |
| 1848 | $\Delta M_0 - 5(\Delta\mu) - 7{\cdot}25\Delta$☿ $= +58{\cdot}4$ |
| 1852 | $\Delta M_0 - 4(\Delta\mu) - 4{\cdot}68\Delta$☿ $= +34{\cdot}4$ |
| 1855 | $\Delta M_0 - 3(\Delta\mu) - 2{\cdot}76\Delta$☿ $= -0{\cdot}1$ |
| 1858 | $\Delta M_0 - 2(\Delta\mu) - 0{\cdot}10\Delta$☿ $= -9{\cdot}0$ |
| 1862 | $\Delta M_0 - 1(\Delta\mu) + 0{\cdot}24\Delta$☿ $= -1{\cdot}8$ |
| 1865 | $\Delta M_0 - 0(\Delta\mu) \quad 0{\cdot}00\Delta$☿ $= 0{\cdot}0$ |
| 1868 | $\Delta M_0 + 1(\Delta\mu) \quad 0{\cdot}00\Delta$☿ $= -1{\cdot}3$ |

Bestimmt man weiter aus diesen Gleichungen die drei Unbekannten so, dass sie die Summe der Fehlerquadrate zum Minimum machen, so erhält man für die uns hier allein interessirende Unbekannte (Δ☿) den Werth:

$$(\Delta ☿) = -0\cdot263137 \pm 0\cdot002335$$

$$1+\frac{\Delta m_0}{m_0} = +0\cdot9736\,863$$

endlich:

$$\text{Masse des Mercur} = \frac{+0\cdot9736\,863}{550\,0000} = \frac{1}{564\,8600 \pm 2000}\text{ [1]}$$

Ich begnüge mich hier mit diesen kurzen Bemerkungen, wie dieser Werth ermittelt wurde und gehe gleich an die Auseinandersetzung der Rechnungen, welche für den Zeitraum 1871—1885 durchzuführen waren, doch werde ich auf den eben erhaltenen Werth weiter unten nochmals zurückkommen.

Im ersten Theil der vorliegenden Arbeit (S. 93) finden sich die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung angesetzt, welche der Vergleich der Elemente Backlund's (System $VI_2$) mit den Normalorten des Encke'schen Kometen (1871—1885) unter Zugrundelegung der Newcomb'schen Erdmasse und unserer Jupitersmasse 1 : 1047·1752 ergeben hat.

Es sei hier besonders darauf aufmerksam gemacht, dass nun ein einziges Massensystem dem Gesammtzeitraume 1819—1885 zu Grunde liegt, da einerseits Backlund gleiche Annahmen für die Massen von Venus, Mars und Saturn wie Asten getroffen hatte, andererseits für Erde und Jupiter von uns die Reductionen auf dieselben Werthe durchgeführt worden sind.

An derselben Stelle (S. 93) gebe ich auch der Bemerkung Raum, dass mit Benützung der Zahlen Backlund's (1871—1885) zur Verbesserung der Elemente, der Mercursmasse, wie der Acceleration die Eliminationsgleichungen in aller Strenge aufgelöst worden waren. Mit Rücksicht darauf, dass hier die Aufgabe im Wesentlichen dieselbe bleibt, — es soll ja nur von einer gleichzeitigen Bestimmung der Acceleration abgesehen werden — konnten die Rechnungen, welche zu den Auseinandersetzungen in dem ersten Theil meiner Arbeit über die Bahn des periodischen Kometen Winnecke erforderlich geworden waren, auch hier mit geringen Abänderungen verwerthet werden. Es war nur im Eliminationsschema die siebente Verticalzeile, da Backlund $\Delta\mu'$ als siebente Unbekannte angenommen hatte, wegzulassen, ferner

$$\frac{[gh6]}{[gg6]}[gh6] \text{ und } \frac{[gh6]}{[gg6]}[gn6] \text{ gleich 0 zu setzen.}$$

Für die letzte Unbekannte fand ich so:

$$10^2\frac{\Delta m_0}{m_0} = +34\cdot68815 \pm 16\cdot8\text{ [2]}$$

$$1+\frac{\Delta m_0}{m_0} = +1\cdot346\,8815$$

und da für die Mercursmasse, an welche diese Verbesserung anzubringen ist, angenommen worden war:

$$m_0 = \frac{1}{763\,6440}$$

ergibt sich schliesslich der Werth:

$$\text{Masse des Mercur} = \frac{+1\cdot346\,8815}{763\,6440} = \frac{1}{566\,9700 \pm 60\,0000}$$

---

[1] Der mittlere Fehler ist hier, wie bei dem weiter unten gegebenen Werthe (Mercursmasse aus Erscheinungen 1871—1885) nur abgerundet angesetzt.

[2] Dem Umstand, dass die Verbesserungscoëfficienten für die Masse des Mercur sich auf einen anderen Werth beziehen wie jener, der zur Darstellung der Normalorte adoptirt worden war, wurde durch Einführung eines Homogenitätsfactors Rechnung getragen.

Während also Asten in seiner Bearbeitung des Encke'schen Kometen (1819—1868) für die Mercursmasse zu den Werth geführt wurde:

$$m'_{☿} = \frac{1}{763\,6440 \pm 19\,5907}$$

ferner Backlund durch unabhängige Bearbeitung der Erscheinungen (1871—1885):

$$m''_{☿} = \frac{1}{266\,8700 \pm 12\,1400}$$

ergibt sich, wenn man nur darauf verzichtet, gleichzeitig mit der Mercursmasse die Acceleration der mittleren Bewegung des Enke'schen Kometen zu bestimmen, in überraschender Übereinstimmung:

$$m^{\mathrm{I}}_{☿}\,{}^{1868}_{1819} = \frac{1}{564\,8600 \pm 2000} \ldots \mathrm{I}) \qquad m^{\mathrm{II}}_{☿}\,{}^{1885}_{1871} = \frac{1}{566\,9700 \pm 60\,0000} \ldots \mathrm{II}).$$

Darf man hiernach noch länger zweifeln, dass die oben hervorgehobene Schwierigkeit hauptsächlich der Grund sei, warum die directe Bestimmung der Masse des Mercur aus den Erscheinungen des Kometen Encke zu so widersprechenden Werthen geführt habe?

Ich halte es wenigstens für überflüssig bei diesem Punkt noch länger stehen zu bleiben. Einige kurze Bemerkungen erlaube ich mir aber zu der Frage, ob der erwähnte Grund auch der einzige sei. Es kömmt mir dieses auch sehr wahrscheinlich vor, denn die Differenz der Nenner obiger Brüche ist so gering, dass sie sich auch anderweitig erklären lässt. Erstens ergibt sich nämlich schon aus der Grösse des mittleren Fehlers des Werthes II, dass dieser Bestimmung wegen der geringen Grösse der Mercursstörungen, die hiezu herangezogen werden konnten, nicht grosse Sicherheit zugesprochen werden könne. Der Werth II ist möglicherweise an sich also fehlerhaft. Aber auch der Werth I dürfte noch eine — allerdings geringere — Correctur erfordern, ist ja zu bedenken, dass die Rechnung, die zu ihm geführt hat, nur eine genäherte sei. Endlich ist aber noch eines Umstandes zu gedenken, der beide Bestimmungen wohl gleichzeitig, aber nicht in gleichem Grade beeinflussen dürfte, nämlich, dass für Venus und Mars (♀ = 1 : 401 839, ♂ = 1 : 268 0337) nicht die genauesten Massenannahmen zur Verwendung kamen.

Ein klares Bild über die Unsicherheit der obigen Werthe kann ich hier nicht geben, da uns hierüber nur die Bearbeitung des Kometen Encke selbst Aufschluss geben kann. Die definitiven Werthe werden aber von den obigen provisorischen sich jedenfalls nur mehr um geringe Grössen unterscheiden können.

## IV. Capitel.

### Zusammenstellung und Kritik der Werthe für die Massen der Planeten Mercur und Jupiter.

Der Übersicht wegen stelle ich hier nochmals die Werthe zusammen, welche aus den vier directen Bestimmungen für die Masse des Planeten Mercur resultiren:

| | | | |
|---|---|---|---|
| I. | $m_{☿} = \frac{1}{501\,2842 \pm 69\,7863}$ | Haerdtl (aus den Erscheinungen des Kometen Winnecke) | |
| II. | $m_{☿} = \frac{1}{551\,4700 \pm 10\,0000}$ [1] | Le Verrier (Resultat aus vier Gleichungen. Siehe oben.) | |
| III. | $m_{☿} = \frac{1}{564\,8600 \pm 2000}$ | v. Asten | Provisorische Werthe aus den Erscheinungen des Kometen Encke: (1819—1868) |
| IV. | $m_{☿} = \frac{1}{566\,9700 \pm 60\,0000}$ | Backlund | (1871—1885) |

[1] Der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung ist unter der Voraussetzung berechnet worden, dass ν (Le Verrier) um eine Einheit der zweiten Decimale noch unsicher sei.

Die Übereinstimmung dieser Zahlen ist eine so befriedigende, dass kein Zweifel mehr darüber obwalten kann, dass man mit der Annahme: 1 : 560 0000 dem wahren Werth für die Masse des Mercur schon sehr nahe kömmt. Hiemit ist aber der Werth näher präcisirt, den wir oben an der Hand unseres Kriteriums nur abschätzen konnten. Es bedeutet dieses allein schon einen grossen Fortschritt in unseren Kenntnissen über diese Masse, da ja zu bedenken ist, dass bis heute sogar die erste Ziffer des Nenners noch in Zweifel stand.

Am weitesten entfernt sich von dem Mittel aus allen vier Bestimmungen unser Werth (I). Ich habe aber schon oben darauf aufmerksam gemacht, dass aus einer directen Bestimmung der Mercursmasse aus den von diesem Planeten auf den Winnecke'schen Kometen ausgeübten Störungen kein irgendwie sicheres Resultat erwartet werden dürfe. Zur Beleuchtung dieses Punktes will ich hier nur noch ergänzen, dass, wie eine Versuchsrechnung mir gezeigt hat, eine ganz geringe Correction der adoptirten Venusmasse allein schon hinreichend sei, das Resultat um 200000 Einheiten des Nenners zu ändern. Von unserer Bestimmung Gebrauch zu machen, scheint mir wenigstens vorderhand noch nicht gerathen.

Mit Rücksicht darauf, dass die Le Verrier'sche Bestimmung auch an Sicherheit viel zu wünschen übrig lässt, muss die Übereinstimmung der drei letzten Werthe eine völlig befriedigende genannt werden, und dürfte jedenfalls das einfache Mittel aus diesen drei Werthen eine für die meisten Zwecke ausreichende Genauigkeit besitzen. Wenn aber die grösste Genauigkeit erforderlich wäre, möchte ich rathen, den Asten'schen Werth (III) unverändert zu adoptiren, da ich — obwohl zu erwägen ist, dass nach den im vorigen Capitel gemachten Bemerkungen gewiss noch eine Verbesserung in Aussicht steht — dieselbe ungefähr nur so gross schätze, als der mittlere Fehler anzeigt, und mir ferner das von Belang scheint, dass die Mercursstörungen in $M$ für (1819—1865) mehr als 20 Minuten betragen, während sie während der Jahre (1871—1885) kaum 30 Secunden erreichen, also im ersten Falle die Bestimmung auf einer weit sichereren Grundlage basirt werden konnte.

Ich will hier nur kurz noch eines angestellten Versuches Erwähnung thun, auch die Massen der Planeten Venus, Erde und Mars aus ihren Störungen auf Komet Winnecke neu zu bestimmen.

Wegen der ungünstigen Relationen unter den Verbesserungscoëfficienten erschien vorderhand eine gleichzeitige Verbesserung aller drei Massen unthunlich. Suchte man aber die Verbesserungen für jede Masse einzeln, so zeigte es sich, dass man immer wieder nahe auf den Werth zurückkam, den man für eine Masse zu Grunde gelegt hatte. Man darf hieraus aber nur schliessen, dass durch Berücksichtigung der Correction blos einer der drei Massen, die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung sich nicht weiter herabmindern lassen und nicht, dass die angenommenen Werthe völlig durch die Bearbeitung des Kometen Winnecke bestätigt würden, da in allen Normalorten eine kleine Änderung der Erdmasse sich sofort durch eine entsprechende der Venus- und Mars-Masse compensiren lässt oder umgekehrt.

Als Schlusswerth für die Masse des Planeten Jupiter resultirt aus der Bearbeitung des Kometen Winnecke während der Jahre 1858—1886:

$$m_{♃} = \frac{1}{1047 \cdot 1758 \pm 0 \cdot 0210}$$

Da es mir möglich geschienen hatte, dass der Werth, den ich in meiner ersten Abhandlung gegeben hatte (1 : 1047.1752) noch merkbar durch Zugrundelegung anderer Werthe für die Massen der übrigen störenden Planeten alterirt werde, habe ich daselbst am Schluss das Mittel: Haerdtl — Schur (1 : 1047.204) in Vorschlag gebracht. Nachdem aber die vorliegenden Rechnungen unseren ersten Werth völlig bestätigen, scheint mir hiedurch die fast vollkommene Unabhängigkeit unserer Bestimmung von den Annahmen über die Massen von Mercur, Venus u. s. w. erwiesen. Dass demnach durch Zuziehung des Werthes von Schur (1 : 1047.232 ± 0.246) die Sicherheit des Werthes für die Jupitersmasse erhöht wird, möchte ich heute nicht mehr behaupten.

Die übrigen zu der Jupitersmasse (1 : 1047.1752) in meiner ersten Abhandlung gemachten Bemerkungen behalten selbstverständlich auch für den obigen Werth volle Geltung.

## Schluss.

### Folgerungen aus den Resultaten, welche die Bearbeitung des periodischen Kometen Winnecke ergeben hat, mit specieller Berücksichtigung des Ausnahmsfalles in der Bewegung des Encke'schen Kometen.

Die Bearbeitung des periodischen Kometen Winnecke in den Jahren 1858 bis 1886 hat uns bis nun der Hauptsache nach in vierfacher Hinsicht Aufschluss gebracht, und zwar erstens über das widerstehende Mittel, zweitens in Bezug auf die Bahn und die Bewegung dieses Kometen, drittens und viertens endlich über die Massen der Planeten Jupiter und Mercur.

Zu den drei letzten Fragen glaube ich nach den in den vorhergehenden Capiteln gegebenen — so weit es bei dem heutigen Stande der Fragen möglich war — vollständigen Ausführungen nichts weiter bemerken zu müssen.

Ein näheres Eingehen auf die erste Frage habe ich aber absichtlich für den Schluss belassen, da mir erst die Verwerthung der in dem Vorangehenden erlangten Resultate hierauf ein ganz neues Licht zu werfen scheint.

Wie Encke, so hat auch Asten durch Bearbeitung des Encke'schen Kometen (in den Jahren 1819—1869) nachgewiesen, dass die Annahme einer Acceleration der mittleren Bewegung nothwendig sei, um die Beobachtungen dieses Zeitraumes überhaupt mit der Rechnung in Einklang bringen zu können, ebenso Backlund für den Zeitraum 1871—1885. Aber es war ferner noch nöthig geworden, um die Darstellung auf die Höhe der Anforderungen zu bringen, ausser zur Acceleration noch zu Correctionen der Massen Zuflucht zu nehmen. So liegt der Schlussdarstellung Asten's die Jupitermasse: 1 : 1049.632, die Erdmasse: 1 : 305 878, endlich die Mercursmasse: 1 : 763 6440 zu Grunde, während Backlund nur eine Correction der Mercursmasse in Betracht ziehend, bei der Schlussdarstellung den Werth adoptirt hatte: Mercursmasse = 1 : 266 8700.

Die von Asten zu Grunde gelegten Werthe für die Massen von Jupiter und Erde stehen aber unzweifelhaft in Widerspruch mit allen neueren Bestimmungen. Doch auch von der Mercursmasse wissen wir heute, dass sie nicht mehr weit von 1 : 560 0000 liegen könne und haben ferner oben den Grund erkannt, warum die Massenbestimmung Asten's und Backlund's zu so widersprechenden Werthen geführt haben, nämlich weil die Mercursmasse immer gleichzeitig mit der Acceleration bestimmt wurde.

Warum aber eine gleichzeitige Bestimmung unzulässig ist, dieses ist noch nicht dargelegt worden, ich erlaube mir daher hier darauf zurückzukommen.

Die Erfahrung hat uns erst gelehrt, dass jeder Körper im Raume auf jeden anderen eine Fernwirkung ausübt, welche sich als Anziehung äussert. Nach Newton's Hypothese wirkt diese Kraft proportional der Masse der Körper und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung.

Man darf aber nicht vergessen, dass das Newton'sche Attractionsgesetz durchaus nicht a priori hingestellt werden kann und dass man aus den Bewegungserscheinungen der Himmelskörper erst auf die wirkende Kraft zurückgeschlossen hat. Ich will das Newton'sche Gesetz aber als streng giltig annehmen, welche Vorraussetzung sich selbst bei den genauesten Untersuchungen glänzend bewährt hat.

Der Ort und die Geschwindigkeit irgend eines Himmelskörpers wird dann für jeden beliebigen Zeitmoment mit einer der Rechnung und der Beobachtung adäquaten Genauigkeit bestimmt werden können und wird stets auch, so lange das Newton'sche Gesetz allein Geltung behält, ein Rückschluss auf die Masse irgend eines störenden Planeten zulässig sein.

Es ist aber weiter klar, dass dasselbe auch für jenen Fall Geltung behält, wo weitere Kräfte einwirken, wenn man nur in der Lage ist, das Gesetz anzugeben und in Rechnung zu ziehen, nach welchem die ausserordentliche Einwirkung vor sich geht. Dieses Ziel ist zwar bei Komet Encke noch nicht erreicht worden, doch über Eines haben uns die Rechnungen hiezu unzweifelhaft Aufschluss gegeben, dass nämlich die Umlaufszeit

dieses Kometen sich von Umlauf zu Umlauf verkürzt, oder dass man, um die Beobachtungen mit der Rechnung halbwegs befriedigend in Einklang bringen zu können, noch an die mittlere Anomalie ein Correctionsglied anbringen müsse von der Form $\mu' t^2$. [1]

An diese Thatsache wollen wir uns für die Folge allein halten, und von dem Gesetze der Acceleration völlig absehend, versuchen uns stufenweise der Wahrheit zu nähern.

Machen wir erstlich also für den von Asten untersuchten Zeitraum (1819—1868) die Annahme: $\mu' = +0\rlap{.}^{\prime\prime}100000$ und berechnen hiemit die empyrischen Correctionen $(E)$, bringen wir ferner diese an die Elemente an, so ergibt der Vergleich der Rechnung mit der Beobachtung Fehler, wir wollen sie mit $u$ bezeichnen.

Eines ist klar: Wären die so berechneten empyrischen Correctionen $(E)$ streng correct, so kann die weitere Auflösung der Elimininationsgleichungen mit Zugrundelegung der $u$ und der sieben Unbekannten (sechs Elemente und Mercursmasse) nach den oben gemachten Bemerkungen nur zu einem nahe richtigen Werth für die Masse des Mercur führen. Dasselbe gilt aber auch für den ebenso zu behandelnden Zeitraum (1871—1885), wo für die Acceleration der mittleren Bewegung der Werth $\mu' := +0\rlap{.}^{\prime\prime}062214$ adoptirt werden soll.

Sind aber die empyrischen Correctionen nicht der Hauptsache nach richtig, mit anderen Worten: können diese nicht einmal als Näherungen angesehen werden, so werden wir keineswegs erwarten dürfen, dass uns die Rechnung für beide Zeiträume zu einem und demselben Werthe für die Mercursmasse führe.

Umgekehrt gestattet uns aber auch wieder der Vergleich der zwei, völlig unabhängig von einander erhaltenen Werthe für die Masse des Mercur einen Schluss darüber, ob die empyrischen Correctionen dem Wesen nach richtig seien oder nicht.

Nachdem uns nun, wie schon oben gezeigt worden war, die Rechnung zu den Werthen geführt hat:

$$\text{Masse des Mercur}\ {}^{1869}_{1819} = 1:564\,8600$$

$$\text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad {}^{1885}_{1871} = 1:566\,9700$$

glaube ich, kann kein Zweifel mehr darüber herrschen, wie die Entscheidung lauten muss.

Hier kommen uns nun die oben erlangten Resultate über die Mercursmasse trefflich zu statten, denn das aus der Bearbeitung des Kometen Winnecke erlangte Kriterium, wie die Massenbestimmung Le Verrier's legen Zeugniss dafür ab, dass der aus der Bearbeitung des Encke'schen Kometen resultirende Schlusswerth für die Masse des Mercur dem wahren Werthe sehr nahe kommt und dass die Übereinstimmung keineswegs als zufällige angesehen werden könne.

Ich mache ausdrücklich darauf aufmerksam, dass nur dieses Moment uns zu den folgenden Schlussfolgerungen berechtigt, denn ohne demselben würden wir uns in einem Cirkel bewegen.

Durch Rücksubstitution des abgerundeten Werthes für die Mercursmasse (1:565 0000) in die Asten'schen Bedingungsgleichungen erhält man die restirenden Fehler in $M$, also wenn man die Unsicherheit der Störungsrechnungen wie der Beobachtungen als verschwindend ansieht, mit verkehrten Vorzeichen jene Beträge, um welche die oben bereits angebrachten genäherten empyrischen Correctionen noch verbessert werden müssen, damit die Rechnung mit der Beobachtung völlig in Einklang kommt.

Dasselbe gilt für 1871—1885, doch beschränke ich mich hier auf die Untersuchung des ersten Zeitraumes.

Aus den Gleichungen von S. 173 erhält man so — $\log \Delta M$ und $\log (\Delta\mu)$ hatte sich beziehungsweise zu $0_n6503$ und $0_n8184$ ergeben, — die folgenden Zusatzglieder zu Asten's empyrischen Correctionen in der mittleren Anomalie:

[1] Das kleine weitere Glied: $m \cos 2u$ vernachlässige ich hier.

| | $\Delta M$ | | $\Delta M$ | | $\Delta M$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1819 | + 9″6 | 1838 | — 9″3 | 1858 | —17″7 |
| 1822 | + 6·9 | 1842 | — 8·8 | 1862 | — 3·8 |
| 1825 | + 1·2 | 1845 | + 8·0 | 1865 | + 4·5 |
| 1829 | — 7·8 | 1848 | +28·1 | 1868 | + 9·8 |
| 1832 | —10·5 | 1852 | +11·4 | | |
| 1835 | — 4·7 | 1855 | —16·0 | | |

Es sei hier bemerkt, dass ich mich überzeugt habe, dass sich diese Grössen durch erneute Auflösung der Bedingungsgleichungen unter Weglassung der Mercursmassenverbesserung, aber Mitnahme der Correctionen von $\mu$, wie $M$ und $\mu'$ nur noch so unbedeutend herabdrücken lassen, dass die Verbesserungen hier ganz vernachlässigt werden können, da die Zahlen, die zu Grunde liegen, selbst um den Betrag von 1 bis 2 Secunden unsicher sein dürften.

Die Grösse der obigen Zahlen zeigt wohl deutlich die Unzulänglichkeit des Gesetzes, nach dem bisher die empyrischen Correctionen in Rechnung gebracht wurden; stellt man jedoch die obigen $\Delta M$ den grossen empyrischen Correctionen Asten's gegenüber, so wird man zugeben müssen, dass die Asten'sche Annahme, dass der Zuwachs der mittleren Bewegung von Umlauf zu Umlauf während der Jahre 1819—1868 ein vollkommen gleicher gewesen sei, sich von der Wahrheit nicht sehr weit entfernt.

Hiemit ist aber auch die Erklärung gegeben, warum die Massenbestimmung des Mercur aus der Bearbeitung des Encke'schen Kometen so widersprechende Werthe ergeben habe. Die Mercursmasse wurde gewissermassen von den Berechnern des Kometen Encke gezwungen, sich wohl den Beobachtungen thunlichst anzuschliessen, zugleich aber auch einem nicht streng giltigem Gesetze über die Veränderung der mittleren Bewegung, während wir, nachdem vorerst der Ausnahmsfall der Hauptsache dadurch elimirt worden war, dass wir gewisse empyrische Correctionen angebracht hatten, ohne uns an ein weiteres Gesetz zu binden, lediglich auf Grund des Newton'schen Gesetzes, die sechs Elemente und die Masse des Mercurs so bestimmten, dass sie sich möglichst den Beobachtungen anschliessen. Dass aber der Ausnahmsfall überhaupt elimirt werden konnte oder wir mit anderen Worten von vornherein in der Lage waren, für die empyrischen Correctionen der Hauptsache nach richtige Werthe anzunehmen, ist selbstverständlich nur den Untersuchungen Asten's und Backlund's zu danken.

Die Frage, wie der Ausnahmsfall in der Bewegung des Encke'schen Kometen zu erklären sei, ist von der Existenz desselben wohl zu trennen. Hierüber wurden verschiedene Ansichten aufgestellt. Encke zog bekanntlich zur Erklärung die Hypothese heran, dass dieser Komet einen merklichen Widerstand im Raume erfahre. Von der Voraussetzung ausgehend, dass die Dichte des Mediums dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional sei und der Widerstand mit dem Quadrate der Entfernung wachse, stellte er sich die Aufgabe, die im Problem als Factor auftretende Widerstandsconstante empyrisch aus der beobachteten Acceleration zu bestimmen, doch sei hier bemerkt, dass die Abnahme der Excentricität von ihm nicht directe, sondern erst aus der Widerstandsconstanten abgeleitet wurde, nachdem die Theorie gezeigt hatte, dass eine durch einen Widerstand hervorgebrachte Acceleration eine Abnahme der Excentricität in Gefolge haben müsse.

Asten hingegen bestimmte auch dieses Glied empyrisch aus den Beobachtungen und kam zu einem Werthe, der mit dem von Encke auf theoretischem Wege erhaltenen nahe zusammenfiel.

Oppolzer[1] hat aber bereits gezeigt, dass man aus dieser nahen Übereinstimmung nicht schliessen dürfe, dass die Encke'sche Voraussetzung über die Constitution des Mediums nahe richtig sei, da fast jede Hypothese, die nur der Bedingung genügt, dass die Verdichtung des Mediums rasch gegen die Sonne hin zunimmt, eine nahe Übereinstimmung herbeiführt. Im Anschluss hieran suchte auch Oppolzer zu erklären, warum die durch den Widerstand erzeugte Acceleration bei Komet Faye Möller's genauen Untersuchungen entgangen sein könne. Betrachtet man nämlich die Himmelskörper als Kugeln, so wird die durch den Widerstand erzeugte Verminderung in der Tangentialbewegung der Kugel bei gleicher Dichte des Mediums und gleicher

[1] Astr. Nachr. Nr. 2309.

Geschwindigkeit umgekehrt proportional sein dem Producte der Dichte der Kugel in deren Radius. Es wäre also nur nöthig, dem Faye'schen Kometen eine etwa dreimal grössere Dichte und einen dreimal grösseren Radius zu ertheilen als dem Encke'schen Kometen, um die Bedenken zum Schwinden zu bringen. Dasselbe könnte auch dadurch erzielt werden, dass man die Dichte des Mediums rascher mit der Entfernung von der Sonne abnehmend voraussetzte. Wie man aber hieraus ersicht, musste schon eine weitere Hypothese herangezogen werden, um das widerstehende Mittel als Erklärungsgrund der Acceleration des Encke'schen Kometen aufrecht erhalten zu können, wenn man nicht mit Möller's Resultaten über Komet Faye in Conflict kommen wollte.

Unüberwindliche Schwierigkeiten stellen sich der Erklärungsart Encke's entgegen, wenn man darauf Rücksicht nimmt, wozu uns die Bearbeitung des Winnecke'schen Kometen geführt hat. Ich habe diesen Punkt schon in meiner ersten Abhandlung kurz berührt. Man müsste nämlich eine höchst unwahrscheinliche weitere Hypothese über den Radius und die Dichte der Winnecke'schen Kometenkugel, wie über die Dichtenabnahme des Mediums adoptiren, um die Thatsache erklären zu können, dass bei unserem Kometen, dessen Periheldistanz ja nur 0·5 astr. Einheiten grösser ist, wie jene des Kometen Encke, sich nicht die geringste Acceleration habe constatiren lassen. Eine solche Annahme stösst aber anderweitig auf Widerspruch, denn eine leichte Rechnung zeigt, dass durch die Wirkung eines so rapid mit der Annäherung an die Sonne an Dichte zunehmenden Mittels die mit parabolischer Geschwindigkeit in das Sonnensystem eintretenden sonnennahen Kometen (wie z. B. der Komet I 1843) bei ihrem ersten Durchgang durch das Perihel zu einer elliptischen Bewegung mit einer Periode von vierundzwanzig Jahren gezwungen würden, und dass diese Periode so schnell verkleinert werden würde, dass die nächste Wiederkehr in etwa 10 Jahren stattfinden müsste, ferner hat uns auch der Vergleich der Geschwindigkeit des Kometen vom Jahre 1882 vor und nach seinem Eintauchen in die Umgebung der Sonne darüber Gewissheit verschafft, dass dieser Komet keine erhebliche Verzögerung erfahren haben könne.

Mit Rücksicht auf die aus der Bearbeitung anderer Kometen erlangten Resultate, stellt sich also schon die Grundlage der Erklärungsweise Encke's, das supponirte „widerstehende Mittel“ als unhaltbar heraus. Dass die Frage, „ob der Weltraum leer sei“, hiemit in gar keinem Zusammenhange steht, braucht wohl hier nicht näher erörtert zu werden.

Fragen wie uns aber weiter, ob denn überhaupt die Hypothese des widerstehenden Mittels heute noch in befriedigender Weise die Bewegungsanomalie des Encke'schen Kometen zu erklären im Stande sei, so muss auch diese Frage entschieden verneint werden, denn schon Asten wie Backlund bewiesen in ihren Untersuchungen, dass die Bewegung dieses Kometen einmal (in der Nähe des Jahres 1869) eine anderweitige, merkbare Veränderung erfahren haben müsse. Wir haben aber ferner gezeigt, dass auch während des Zeitraumes 1819—1868 durchwegs Zusatzglieder an Asten's empyrische Correctionen angebracht werden müssen, um nur genähert die Perihelzeiten darstellen zu können, was uns zu dem Schluss berechtigt, dass auch von 1819—1868 der Zuwachs der Bewegung von Umlauf zu Umlauf kein constanter gewesen sein könne. Da aber die Hypothese des widerstehenden Mittels — sofern man nicht noch zu einer Zusatz-Hypothese greifen will — nur einen constanten Zuwachs erklärt, entfällt gerade das, was der Encke'schen Hypothese den Vorzug vor anderen Erklärungsarten begründet hat, die Einfachheit.

Eine weitere Erklärungsart verdanken wir Bessel. Dieselbe basirt auf der Existenz einer durch die Sonne im Kometen entwickelten Kraft, vermöge welcher derselbe materielle Theilchen von sich stösst.

Dass eine solche Kraft existirt, dafür spricht wohl eine ungeheuere Zahl von Erscheinungen, welche an den verschiedensten Kometen beobachtet worden sind.

Dass dieselbe Kraft aber auch zur Erklärung der Veränderung der Umlaufszeit eines Kometen herangezogen werden könne, zeigt Bessel in einem Aufsatz in den Astr. Nachr. (Nr. 310). Ich muss mich hier mit einem Hinweis auf diese Arbeit Bessel's begnügen. Eine Stelle aus Asten's Untersuchungen,[1] welche an

[1] Asten, Bulletin de l'Académie de St. Petersbourg, XX. tome, p. 340.

Bessel's Aufsatz anknüpft, erlaube ich mir aber hier vollinhaltlich wiederzugeben, da mir diese heute ganz besonderes Interesse zu verdienen scheint:

„In einem Aufsatze „Bemerkungen über mögliche Unzulänglichkeit der die Anziehung allein berücksichtigenden Theorie der Kometen", welche direct gegen Encke's Hypothese gerichtet ist, zeigt Bessel, dass die Reaction der Ausströmung gegen den Kometenkern Veränderungen in der elliptischen Bewegung desselben hervorbringen müsse, welche nur dann, unter plausibler Annahme für das Verhältniss der ausgeströmten Materie zu der Masse des Kometen, als für die Beobachtung unmerklich vorausgesetzt werden dürfen, wenn man annimmt, dass die Intensität der Ausströmung in symmetrischen Lagen zum Perihel identisch ist. Die Ausströmung von Materie ist aber, wie bei den meisten Kometen, so auch beim Encke'schen mehrfach beobachtet worden. Unter den vorhandenen Abbildungen wird die Existenz derselben am deutlichsten durch die Zeichnungen constatirt, welche uns Professor Hall für die Erscheinung von 1871 geliefert hat.[1] Dass aber durch Processe, welche mit dem Ausströmungsphänomen in engem Zusammenhang stehen, sich materielle Theile vom Kometen ablösen können, deren Masse zur Masse des Kometen durchaus nicht als verschwindend betrachtet werden darf, dafür haben wir ein eklatantes Beispiel an Biela's Komet, welcher sich vor den Augen der Astronomen in zwei Stücke spaltete. In neuester Zeit hat nun Zöllner versucht, die von Bessel supponirte Polarkraft, welche im Kometen durch die Sonne entwickelt wird, mit der uns aus irdischen Processen bekannten Kraft der Expansion der Gase und Dämpfe zu identificiren. Nach diesem Physiker bestehen die Kometen aus flüssigen Meteormassen, welche bei Annäherung an die Sonne in's Sieden gerathen. Der Siedeprocess muss in um so grössere Tiefe der ganzen Masse dringen, je näher der Komet der Sonne kömmt und je länger er in ihrer Nähe verweilt. Es ist dabei klar, dass die Dampfentwicklung und die Fortschleuderung von Flüssigkeitstheilen nach dem Perihel stärker sein muss, als vor demselben. Die Zöllner'sche Theorie liefert uns daher in ungezwungener Weise das Moment, welches nach Bessel's Hypothese erforderlich ist, um Veränderungen in der Umlaufszeit eines Kometen zu erklären. Da ferner nach Zöllner der calorische Einfluss der Sonne die Ursache der Ausströmung ist, so darf man weiter schliessen, dass, je nachdem der Wärmegrad der Sonne ein verschiedener ist, auch die Intensität der Ausströmung eine andere sein muss. Die Acceleration der Bewegung des Kometen als Function der Sonnenwärme betrachtet, muss daher eine wechselnde sein, sobald die Sonne als veränderliche Wärmequelle angesehen wird. Unter diesem Gesichtspunkt erscheint der Gedanke als nicht unwahrscheinlich, dass es vielleicht in der Zukunft gelingen dürfte, einen Zusammenhang zwischen der Periode der Sonnenflecken und der Veränderung in der Acceleration der mittleren Bewegung des Encke'schen Kometen nachzuweisen. Wenn Zöllner's Theorie das Wesen der Sache trifft, so handelt es sich hier nur um eine Frage der Intensität."

Zu einem näheren Eingehen auf Bessel's Erklärungsversuch scheint mir hier nicht der Platz zu sein, desgleichen auch nicht zu Erörterungen über die Natur jener Kraft, welche den Ausnahmsfall in der Bewegung des Encke'schen Kometen hervorbringt.

Eines scheint mir aber klar: Da Beziehungen der Sonnenflecken mit magnetischen Schwankungen und dem Polarlichte heute wohl keinem Zweifel mehr unterworfen sind, so muss man, wenn es sich zeigt, dass auch die Veränderungen der Bewegung des Encke'schen Kometen Beziehungen zu der Sonnenthätigkeit verrathen, schliessen, dass alle vier Erscheinungen unter dem Einfluss einer gemeinschaftlichen Ursache stehen.

Dass aber sehr wahrscheinlich ein Zusammenhang zwischen der 11jährigen Fleckenperiode und den Veränderungen in der Bewegung des Encke'schen Kometen besteht, das erlaube ich mir noch, bevor ich schliesse, hier kurz darzulegen. Vorher muss ich aber noch einen Punkt näher beleuchten; er betrifft den Moment, wann die grössere Veränderung in der Nähe des Jahres 1869 stattgefunden habe.

Bei Backlund findet man am Schlusse seiner Abhandlung die folgende Stelle: „Eine Veränderung, wenn sie als eine momentane angenommen wird, hat zu der Zeit stattgefunden, als der Komet im Jahre 1870 sich

---

[1] Reports on Observations of Encke's Comet during its Return in 1871 by Asaph Hall and W. M. Harkness, Washington 1872.

in der Nähe des Aphels befand," und stützt sich die Begründung hauptsächlich darauf, dass an die Elemente, welche die Beobachtungen 1871—1885 (unter Zugrundelegung der Mercursmasse 1 : 2668700) gut darstellen, und zwar in der mittleren Anomalie eine Verbesserung von 30' angebracht werden müsste, um den Beobachtungen vom Jahre 1868 nur näherungsweise genügen zu können.[1]

Ich erlaube mir darauf aufmerksam zu machen, dass diese Behauptung nicht länger aufrecht erhalten werden könne. Führt man nämlich unsere Mercursmasse ein und bringt ferner jene Verbesserung an die Backlund'schen Elemente an, von denen wir bereits oben erwähnten, dass sie gleichzeitig mit der Correctur der Mercursmasse gesucht worden waren, so gelangt man zu einem Werth für die mittlere Anomalie des Jahres 1868, nahe übereinstimmend mit dem aus den Beobachtungen abgeleiteten. Die Erscheinung 1868 wird dadurch aber mit jener vom Jahre 1871 wie jenen der späteren Jahre verbindbar.

Wir stehen demnach der Thatsache gegenüber, dass der Erscheinung 1868 in doppelter Weise nahe genügt werden könne, einerseits mit den Elementen und der Acceleration, welche von Asten aus der Verbindung der Erscheinungen 1819—1868 abgeleitet worden sind, anderseits aber auch mit den von Backlund aus den Erscheinungen 1868—1885 gewonnenen Werthen. Diese Thatsache ermöglicht aber den strengen Beweis hiefür, dass die Zeit, in der die Veränderung vor sich gegangen ist, nahe mit dem Perihel-durchgang 1868 zusammengefallen sei.

Denn berücksichtigt man, dass die Accelerationsconstante mit $\tau^2 = (t:1200)^2$ (Epoche 1868) zu multipliciren ist, so wird die Differenz der empyrichen Correctionen, bei Zugrundelegung der von Asten und der von Backlund gegebenen Werthe für $\mu'$ nur dann klein sein, also die Beobachtungen von 1868 von beiden Seiten her nahe darstellbar sein können, wenn $\tau$ selbst sehr klein ist, das heisst aber, die Veränderung kann nur in jenem Zeitraume vor sich gegangen sein, als der Komet Encke sich im Jahre 1868 im Perihel befand.

Dieses Resultat gab die Veranlassung, mich auch etwas eingehender mit der Periode 1868—1885 zu befassen und zu untersuchen, ob sich hier nicht durch directen Vergleich der Beobachtung mit der Rechnung Spuren einer Veränderung der Bewegung schon während der Dauer einer Erscheinung, namentlich jener des Jahres 1868 constatiren liessen.

Bringt man zu diesem Behufe an die verbesserten Backlund'schen Elemente (1868—1885) derartige — für die hier angeführten Fälle höchst unbedeutende — empyrische Correctionen in $M$ an, dass die Elemente z. B. den Normalorten 1868 Juli 27.5 oder 1878 August 12.5 völlig genügen, so werden diese Elemente, wenn die Bewegung sich während der Dauer der Beobachtungen nicht geändert hat,[2] auch den übrigen Normalorten dieser Jahre nahe genügen müssen. Eine Veränderung von $\mu$ während der Dauer der Beobachtungen werden wir aber dann annehmen müssen, wenn es sich zeigt, dass für $M$ weitere Correctionen mit ausgesprochenem Gang erforderlich seien, damit die Beobachtung mit der Rechnung während der ganzen Zeit, als Beobachtungen einer Erscheinung vorliegen, in Einklang bleiben.

Die Rechnung bestätigte meine Vermuthung in auffallender Weise, denn ein Gang in den folgenden Zahlen für die drei untersuchten Jahre (1868, 1878, 1881) kann nicht geleugnet werden:[3]

| | $\Delta M$ | Diff. | |
|---|---|---|---|
| 1868 Juli 27·5 | 0'0 | | vor Perihel |
| Aug. 15·5 | +1·0 | +0·0 | |
| Aug. 23·0 | +2·2 | +1·2 | |
| Aug. 30·0 | +2·7 | +0·5 | |
| 1878 Aug. 12·5 | 0·0 | | nach Perihel |
| Aug. 22·5 | +1·8 | +1·8 | |
| Sept. 25·5 | +3·9 | +2·1 | |

| | $\Delta M$ | Diff. | |
|---|---|---|---|
| 1881 Aug. 29·5 | −3·9 | | vor Perihel |
| Sept. 24·5 | −0·5 | +3·4 | |
| Oct. 4·5 | 0·0 | +0·5 | |
| Oct. 18·5 | +5·4 | +5·4 | |
| Nov. 8·5 | +7·7 | +2·3 | |

[1] Näheres hierüber findet man in „Komet Encke 1865—1885, S. 31 ff.

[2] Die Veränderung der Störungen während der Dauer der Beobachtungen wurden berücksichtigt.

[3] Das Glied $m \cos 2u$ ist hiebei noch einbezogen. Auch nach Eliminirung desselben bleibt noch der ausgesprochene Gang.

Dass diese Thatsache noch nicht klar hervorgetreten war, ist derselben Ursache zuzuschreiben, welche schon oben bei der Bestimmung der Mercursmasse erwähnt wurde.

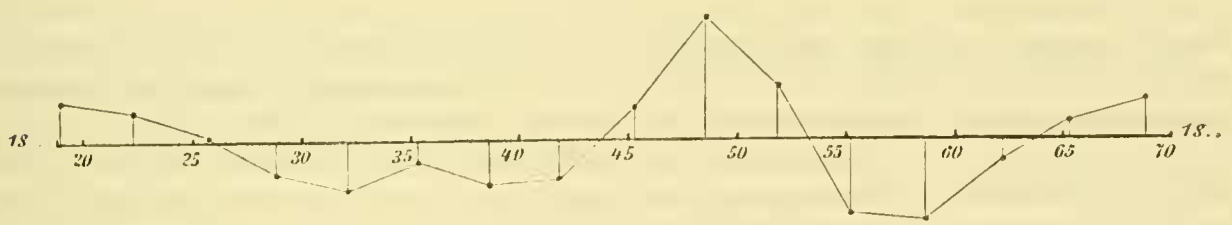
Besonders auffällig scheint mir der Gang der Zahlen für das Jahr 1881. Mit Rücksicht aber auf den Umstand, dass die obigen Zahlen noch um Zehntel-Secunden unsicher sein können, wage ich heute noch nicht, es als bewiesene Thatsache hinzustellen, doch scheint mir der Gang der Zahlen darauf hinzuweisen, dass nicht nur innerhalb der 70 Tage, über welche sich die Beobachtungen erstrecken, eine Veränderung der Bewegung vor sich gegangen sei, sondern dass dieselbe auch mit der Annäherung an das Perihel an Intensität zugenommen habe.

Es bedarf wohl keiner weiteren Begründung, dass, wenn schwache Spuren einer Veränderung der mittleren Bewegung schon dann hervortreten, so lange man sich nur auf die Berücksichtigung von Beobachtungen beschränkt, die entweder alle vor oder nach dem Perihel angestellt wurden, man aus der Gegenüberstellung von Beobachtung in beiden Bahnzweigen während einer einzelnen Erscheinung sich leicht hierüber völlige Gewissheit müsste verschaffen können.

Leider wurde aber der Komet Encke nur in den Jahren 1842, 1861 und 1885 vor und nach dem Perihel beobachtet und können auch diese Beobachtungen nicht herangezogen werden, da in diesen Jahren sich die Aenderungen der Elemente nach dem Perihel mit so kleinen Factoren auf den geocentrischen Ort übertragen, dass ein Rückschluss aus der Differenz der Beobachtung mit der Rechnung auf die Aenderung der Elemente als nicht zulässig bezeichnet werden muss.

Wir wollen nun nochmals auf jene Zahlen zurückgreifen, die wir oben mit „Zusatzglieder" zu Asten's empyrische Correctionen bezeichnet haben.

Es ist klar, dass diese Zahlen nur als Durchschnittswerthe angesehen werden dürfen, da wir gesehen haben, dass sich die mittlere Bewegung selbst während der Dauer der Beobachtung schon merklich ändert. Wir wollen aber annehmen, dass die Aenderung immer plötzlich und im Augenblick des Periheldurchganges eingetreten sei. Trägt man dann die obigen Werthe als Ordinaten in ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein, und auf die Abscissenaxe die Momente der Periheldurchgänge, verbindet ferner die Endpunkte, so entsteht folgende gebrochene Linie:




Von einem auffälligen Umstand überzeugt man sich leicht durch einen Blick auf diesen Linienzug, dass nämlich durchgehends eine rund zehnjährige Periode verfliesst von dem Moment an, wo eine stärkere Abweichung gegen die + oder — Seite hin beginnt, bis zu dem Zeitpunkt, wo sie wieder verschwindet, oder auch dass alle 10 Jahre die Abweichung von dem angenommenen mittleren Werth der Acceleration (+0ʺ100) ein Maximum erreicht. Auch fällt es auf, dass in der zweiten Hälfte der Curve die Abweichungen viel ausgesprochener hervortreten wie in der ersten Hälfte.

Diese Umstände in Verbindung mit der schon oben besprochenen Thatsache, dass die mittlere Bewegung im Jahre 1868 eine ausnahmsweise grössere sprungartige Veränderung erlitten habe, rief in mir die Vermuthung wach, dass sich dasselbe Ereignis mehreremale in dem Zeitraume 1819—1885 (vielleicht in einer rund 10 jährigen Periode) wiederholt habe.

Für einen Fall lässt sich dieses auch leicht beweisen. Macht man nämlich von den obigen Zahlen Gebrauch, so überzeugt man sich durch eine kurze Rechnung, dass sich die Differenzen vom Jahre 1855—1868

durch eine gleich grosse Verbesserung von $M$, $\mu$ und $\mu'$ wegschaffen lassen, während bei Einbeziehung des Jahres 1852 die Fehler nicht herabgemindert werden können. Wir haben also hier denselben Fall wie im Jahre 1868 vor uns. Nimmt man ferner auch hier darauf Rücksicht, dass eine Veränderung der Bewegung erst in der benachbarten Erscheinung deutlich hervortritt, so ergibt sich als Zeitpunkt des scheinbaren Sprunges in $\mu$ der Periheldurchgang 1855.

In der Nähe des Jahres 1845 müssen jedenfalls (vielleicht mehrfach) grössere Veränderungen vor sich gegangen sein. So macht schon Asten darauf aufmerksam, dass hier der Komet Encke eine um ein Drittel stärkere Acceleration erfahren zu haben scheine, als aus den früheren Beobachtungen gefolgert werden müsse, [1] und erübrigt auch in seiner Schlussdarstellung des Normalortes des Jahres 1845 ein ausnahmsweis grosser Fehler (von 70 Secunden). Leider erlaubt aber die geringe Grösse der zu Grunde liegenden Zahlen, wie die steigende Unsicherheit meiner genäherten Rechnung eine eingehendere Behandlung dieser Erscheinungen, wie ein weiteres Zurückgehen auf die Erscheinungen vor 1845 nicht mehr.

Als unzweifelhaft möchte ich jedoch wieder auf Grund meiner Rechnung für den Zeitraum 1871—1885 die Thatsache bezeichnen, dass auch während dieses Zeitraumes ein oder zwei scheinbare Sprünge oder grössere Veränderungen in der mittleren Bewegung vorgekommen seien, denn mit Beibehaltung des constanten Werthes ($+0\rlap{.}''062$) findet man bei der Darstellung der Normalorte mit unserer Mercursmasse absolut kein Auslangen. Zwar bin ich nicht im Stande heute auch den Zeitpunkt mit Gewissheit anzugeben, doch spricht die Grösse der Fehler in der Darstellung der Beobachtungen während der Dauer einer Erscheinung dafür, dass in den Jahren 1878 und 1881 die Veränderungen intensivere waren, wie in den benachbarten Erscheinungen.

Für den Gesammtzeitraum 1819—1885 lässt sich demnach die Frage, ob und wann grössere Veränderungen der mittleren Bewegung vorgekommen seien, heute nur folgendermassen beantworten:

| | | |
|---|---|---|
| 1832 — 1835 | grössere Veränderung | wahrscheinlich (aus Curvenzug.) |
| 1845 | „ „ | höchst wahrscheinlich (nach Asten) |
| 1855 | „ „ | sicher |
| 1868 | „ „ | sicher |
| 1878 — 1881 | „ „ | sehr wahrscheinlich. |

Die Übereinstimmung dieser Jahreszahlen mit den Jahreszahlen, in denen die Sonnenfleckenzahl ein Minimum erreichte (1833, 1845, 1856, 1867, 1879), ist eine so merkwürdige, dass es mir scheint, man könne sich nicht länger der Nothwendigkeit entziehen, an einen Zusammenhang zwischen den Veränderungen der Bewegung des Encke'schen Kometen mit der 11jährigen Sonnenfleckenperiode zu glauben, umsomehr, als sich auch physikalisch ein Zusammenhang leicht erklären lässt, denn nach Zöllner wäre die 11jährige Periode der Sonnenflecken nichts anderes als das Resultat eines grossen in der Sonne und ihrer Umgebung gleichzeitig stattfindenden Ausgleichungsprocesses von Druck und namentlich von Temperatursdifferenzen, und endlich noch der Umstand hinzukömmt, dass schon auf einem, von dem hier eingeschlagenen völlig unabhängigen Weg eine gewisse Wechselbeziehung zwischen den Erscheinungen auf der Sonne und im Kometen Encke wahrscheinlich gemacht wurde.

In einem Aufsatz in den Astr. Nachr. (Nr. 2836), „Die Helligkeit des Encke'schen Kometen" betitelt, macht nämlich A. Berberich darauf aufmerksam, dass auch die Lichtstärke dieses Kometen in den verschiedenen Erscheinungen deutlich ganz beträchtliche Differenzen erkennen lasse, und setzt daselbst auch die Gründe auseinander, die ihn zu der Ansicht führten, dass sich in der Kometenhelligkeit die Thätigkeit der Sonne abspiegle, denn „stelle man die Erscheinungen des Encke'schen Kometen zusammen mit den von Prof. R. Wolf gegebenen Epochen der Sonnenfleckenperiode, so trete das merkwürdige Resultat hervor, dass die hellen Erscheinungen um die Zeiten der Maxima, die lichtschwachen um die Zeiten der Minima der Sonnenthätigkeit sich gruppiren".

---

[1] Asten, Bulletin de l'Académie Impériale de sciences de St. Pétersbourg, XX. tome, p. 340.

Ich will hier innehalten, denn ich befürchte ohnehin schon die Grenze dessen überschritten zu haben, was mit Rücksicht auf den Titel dieser Abhandlung hier zur Erörterung hätte kommen sollen. Sollte es mir durch die vorangehenden knappen Bemerkungen und provisorischen Rechnungen, insbesondere aber durch mein Resultat über die Masse des Mercur gelungen sein, auch zu einem Fortschritt in der Kenntniss des Ausnahmsfalles in der Bewegung des Encke'schen Kometen beigetragen zu haben, so hätte ich mehr erreicht, als ich zu erreichen nur wünschen konnte.

## Nachtrag.

Leider zu spät, um in der vorliegenden Arbeit darauf eingehen zu können, gelangte ein Aufsatz in meine Hände, in welchem T. Sherman auch zu dem Resultat gelangt, dass ein Zusammenhang zwischen der Sonnenfleckenperiode und der Bewegungsanomalie des Encke'schen Kometen bestehe. Ich muss mich demnach hier auf einen Hinweis und die Angabe des Titels des Aufsatzes beschränken: A study in the elements of Encke's comet, by Orray T. Sherman. (The Astronomical Journal. Vol. VIII, Nr. 181.)

# Inhaltsverzeichniss.

## Erster Theil.

**Anschluss der Elemente an die Beobachtungen mit Berücksichtigung neuerer Werthe für die Massen der störenden Planeten.**



## Zweiter Theil.

**Über die Masse des Planeten Mercur.**



## Schluss.